Exercícios Resolvidos de Física Básica

Jason Alfredo Carlson Gallas, **professor titular de física teórica,**
Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha
Universidade Federal da Paraíba (João Pessoa, Brasil)
Departamento de Física

Baseados na **SEXTA** edição do "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.fisica.ufpb.br/∼jgallas*

Contents

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jasongallas @ yahoo.com` (sem "br" no final...)
(`listaq3.tex`)

37 As Equações de Maxwell – [Capítulo 37, página 316]

37.1 Questões

Q 37-3.

Por que é tão fácil mostrar que "um campo magnético variável produz um campo elétrico", mas é tão difícil mostrar de um modo simples que "um campo elétrico variável produz um campo magnético"?

► Porque os campos magnéticos devidos a campos elétricos variáveis são extremamente fracos. Isto deve-se ao coeficiente $\mu_0\epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2}$ do termo $d\Phi_E/dt$ na lei de Ampère-Maxwell ser muito pequeno em relação ao outro termo da equação. A constante c representa a velocidade da luz.

37.2 Problemas e Exercícios

37.2.1 As Equações de Maxwell: Uma Lista Provisória – (1/2)

E 37-1.

Verifique o valor numérico da velocidade escalar da luz usando a Eq. 37-1 e mostre que a equação está dimensionalmente correta. (Veja o Apêndice B.)

► No Apêndice B, pág. 321, encontramos que

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1.256\,637\,061\,43 \times 10^{-6} \quad \text{H/m}, \\ \varepsilon_0 &= 8.854\,187\,817\,62 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} = 2.997\,935 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

O Apêndice B informa que o valor experimental de c é

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Não deixe de fazer a análise dimensional pedida!

E 37-2.

(a) Mostre que $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\ \Omega$. (Esta grandeza é chamada de "impedância do vácuo".) **(b)** Mostre que a freqüência angular correspondente a 60 Hz é igual a 377 rad/s. **(c)** Compare os itens (a) e (b). Você acha que esta coincidência tenha influido ma escolha de 60 Hz para os geradores de corrente alternada? Lembre-se de que na Europa usam 50 Hz.

► **(a)**

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} &= \sqrt{\frac{1.256\,637\,061\,43 \times 10^{-6} \quad \text{H/m}}{8.854\,187\,817\,62 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}}} \\ &= 376.730\ \Omega. \end{aligned}$$

(b) $f_{60} = 2\pi\,\omega = 2\pi\,60 = 376.991$ Hz. Por outro lado, $f_{50} = 314.159$ Hz.
(c) Espaço reservado para sua resposta:

37.2.2 Campos Magnéticos Induzidos – (3/5)

E 37-3.

Para a situação do Exemplo 37-1, quais as possíveis distâncias onde o campo magnético induzido se reduz à metade do seu valor máximo?

► Seja R o raio da placa do capacitor e r a distância a partir do eixo do capacitor. Para pontos tais que $r \leq R$ a magnitude do campo magnético é dada por

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 r}{2}\frac{dE}{dt}$$

enquanto que para $r \geq R$ ela é dada por

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt}.$$

O campo magnético máximo ocorre nos pontos em que $r = R$ sendo então seu valor dado por qualquer uma das fórmulas acima:

$$B_{\text{max}} = \frac{\mu_0\epsilon_0 R}{2}\frac{dE}{dt}.$$

Existem **dois** valores de r para os quais $B(r) = B_{\text{max}}/2$: um menor do que R e um maior. O valor menor do que R pode ser encontrado resolvendo-se em termos de r a equação

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 r}{2}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0\epsilon_0 R}{4}\frac{dE}{dt} \ \left(\equiv \frac{B\text{max}}{2}\right).$$

O resultado é $r = R/2 = 55/2 = 27.5$ mm. O valor que é maior do que R é obtido resolvendo-se para r a equação

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0\epsilon_0 R}{4}\frac{dE}{dt}.$$

O resultado é $r = 2R = 2 \times 55 = 110$ mm.

37.2.3 Corrente de Deslocamento – (6/15)

E 37-6.

Prove que a corrente de deslocamento num capacitor de placas paralelas pode ser escrita como

$$i_d = C\frac{dV}{dt}.$$

► A corrente de deslocamento é dada por

$$i_d = \epsilon_0 A\frac{dE}{dt},$$

onde A é a área de uma das placas e E é a magnitude do campo elétrico entre as placas. O campo entre as placas é uniforme, de modo que $E = V/d$, onde V é a diferença de potencial entre as placas e d é a separação das placas. Portanto

$$i_d = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt},$$

uma vez que $\epsilon_0 A/d$ é a capacitância C de um capacitor de placas paralelas "cheio de vácuo".

E 37-7.

Dispõe-se de um cacitor de placas paralelas de 1 μF. Como seria possível obter uma corrente de deslocamento (instantânea) de 1 A no espaço entre as placas?

► Para tanto basta variar o potencial entre as placas a uma taxa de

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i_d}{C} = \frac{1 \text{ A}}{10^{-6} \text{ F}} = 10^6 \text{ V/s}.$$

E 37-8.

Para a situação do Exemplo 37-1, mostre que a *densidade de corrente de deslocamento* J_d para $r \leq R$, é dada por

$$J_d = \epsilon_0\frac{dE}{dt}.$$

► Considere uma área A, normal a um campo elétrico **E**. A densidade de corrente de deslocamento é uniforme e normal à área. Sua magnitude é dada por $J_d = i_d/A$. Nesta situação temos

$$i_d = \epsilon_0 A\frac{dE}{dt},$$

de modo que

$$J_d = \frac{1}{A}\epsilon_0 A\frac{dE}{dt} = \epsilon_0\frac{dE}{dt}.$$

P 37-14.

Em 1929, M.R. Van Cauwenberghe conseguiu medir diretamente, pela primeira vez, a corrente de deslocamento i_d entre as placas de um capacitor de placas paralelas, submetido a uma diferença de potencial alternada, como está sugerido na Fig. 37-1. Ele usou placas circulares cujo raio efetivo era de 40 cm e cuja capacitância era de 100 pF. A diferença de potencial aplicada tinha um valor máximo V_m de 174 kV na freqüência de 50 Hz. **(a)** Qual foi a corrente de deslocamento máxima obtida entre as placas? **(b)** Por que foi escolhida uma diferença de potencial tão elevada? (A delicadeza destas medidas é tal que elas só foram realizadas diretamente mais de 60 anos depois de Maxwell ter enunciando o conceito de corrente de deslocamento!)

► **(a)** Use os resultados do Exercício 37-6, com $V = V_m \sin(2\pi f t)$. A derivada em relação ao tempo é $dV/dt = 2\pi f V_m \cos(2\pi f t)$, de modo que $i_d = 2\pi f C V_m \cos(2\pi f t)$, sendo a corrente de deslocamento máxima dada por

$$\begin{aligned} i_d\,\text{max} &= 2\pi f C V_m \\ &= 2\pi(50)(100 \times 10^{-12})(174 \times 10^3) \\ &= 5.47 \times 10^{-3}\text{A}. \end{aligned}$$

(b) A corrente de deslocamento máxima é diretamente proporcional à máxima diferença de potencial aplicada. Um valor grande de V_m produz um valor de i_d max mais facilmente mensurável do que com V_m menor.

P 37-15.

O capacitor na Fig. 37-8 consistindo em duas placas circulares de raio $R = 18$ cm está ligado a uma fonte de fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ senωt, onde $\mathcal{E}_m = 220$ V e $\omega = 130$ rad/s. O valor máximo da corrente de deslocamento é

$i_d = 7.6\ \mu$A. Despreze a distorção do campo elétrico nas bordas das placas. **(a)** Qual é o valor máximo da corrente i? **(b)** Qual é o valor máximo de $d\Phi_E/dt$, onde Φ_E é o fluxo elétrico na região entre as placas? **(c)** Qual é a separação d entre as placas? **(d)** Determine o valor máximo do módulo de $\mathbf{B}$ entre as placas a uma distância $r = 11$ cm do centro.

► **(a)** Para qualquer instante t, a corrente de deslocamento i_d existente no espaço entre as placas é igual à corrente condução i nos fios. Portanto $I_{\text{max}} = i_{d\text{ max}} = 7.6\mu$A.

(b) Como $i_d = \epsilon_0(d\Phi_E/dt)$,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d\Phi_E}{dt}\Big)_{\text{max}} = \frac{i_{d\text{ max}}}{\epsilon_0} &= \frac{7.6\times10^{-6}\text{ A}}{8.85\times10^{-12}\text{ F/m}}\\ &= 8.59\times10^5\text{ V·m/s.}\end{aligned}$$

(c) De acôrdo com o Exercício 37-6

$$i_d = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{dV}{dt}.$$

Na situação em questão, a diferença de potencial através do capacitor coincide em magnitude com a fem do gerador, de modo que $V = \mathcal{E}_m$ senωt e $dV/dt = \omega\mathcal{E}_m\cos\omega t$. Portanto

$$i_d = \underbrace{\frac{\epsilon_0 A\omega\mathcal{E}_m}{d}}_{\equiv\, i_d\text{ max}}\cos\omega t.$$

donde se tira facilmente que

$$\begin{aligned}d &= \frac{\epsilon_0 A\omega\mathcal{E}_m}{i_{d\text{ max}}}\\ &= \frac{(8.85\times10^{-12})\,\pi\,(0.18)^2(130)(220)}{7.6\times10^{-6}}\\ &= 3.39\times10^{-3}\text{ m,}\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $A = \pi R^2$.

(d) Use a lei de Ampère-Maxwell na forma $\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_d$, onde o caminho de integração é um círculo de raio r entre as placas, paralelo a elas. I_d é a corrente de deslocamento através da área limitada pelo caminho de integração. Como a densidade da corrente de deslocamento é uniforme entre as placas, temos $I_d = (r^2/R^2)i_d$, onde i_d é a corrente de deslocamento total entre as placas e R é o raio da placa. As linhas de campo são círculos no eixo das placas, de modo que $\mathbf{B}$ é paralelo ao vetor $d\mathbf{s}$. A magnitude do campo é constante ao longo da trajetória circular, de modo que $\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi rB$. Logo,

$$2\pi rB = \mu_0\Big(\frac{r^2}{R^2}\Big)\,i_d$$

dando

$$B = \frac{\mu_0 i_d r}{2\pi R^2}.$$

O campo magnético máximo é dado por

$$\begin{aligned}B_{\text{max}} &= \frac{\mu_0 i_{d\text{ max}}\, r}{2\pi R^2}\\ &= \frac{(4\pi\times10^{-7})(7.6\times10^{-6})(0.11)}{2\pi(0.18)^2}\\ &= 5.16\times10^{-12}\text{ T.}\end{aligned}$$

37.2.4 Equações de Maxwell: a Lista Completa – (16/20)

P 37-20.

Uma longa barra cilíndrica condutora, de raio R, está centrada ao longo do eixo x como mostra a Fig. 37-11. A barra possui um corte muito fino em $x = b$. Uma corrente de condução i, aumentando no tempo e dada por $i = \alpha t$, percorre a barra da esquerda para a direita; α é uma constante de proporcionalidade (positiva). No instante $t = 0$ não existe cargas nas faces do corte próximo a $x = b$. **(a)** Determine o módulo da carga nessas faces em função do tempo. **(b)** Use a Eq. I da Tabela 37-2 para determinar E no intervalo entre as faces em função do tempo. **(c)** Esboce as linhas de $\mathbf{B}$ para $r < R$, onde r é a distância ao eixo x. **(d)** Use a Eq. IV da Tabela 37-2 para determinar $B(r)$ no intervalo entre as faces para $r \le R$. **(e)** Compare a resposta do item (d) com $B(r)$ na *barra* para $r \le R$.

► **(a)** No instante t a carga na face direita é dada por

$$q = \int_0^t i\ dt = \int_0^t \alpha t\ dt = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Para o mesmo instante, o valor da carga na face esquerda é $-\alpha t^2/2$.

(b) Use uma superfície Gaussiana com a forma de um cilindro, concêntrica com a barra condutora, com um extremo dentro do intervalo onde existe o corte e o outro dentro da barra à esquerda do corte, (conforme ilustrado na figura à direita). O campo elétrico está na direção positiva do eixo x de modo que precisamos apenas considerar as faces do cilindro. A magnitude do campo elétrico na face esquerda é dado por ρJ, onde ρ é a resistividade da barra e J é a densidade de corrente.

Denotemos por E a magnitude do campo na face direita. Além disto, suponhamos que a densidade de corrente é uniforme na face esquerda e que o campo elétrico é uniforme na face direita. Neste caso,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\rho JA + EA,$$

onde A é a área de uma das faces. Nós supomos ainda que a resistividade é tão pequena que nos permita desprezar o termo acima no qual ela aparece. A lei de Gauss fica $EA = Q/\epsilon_0$, onde Q é a carga na barra e dentro da superfície Gaussiana. A área da face do cilindro Gaussiano é $A = \pi r^2$, onde r é o raio, e a carga englobada pela Gaussiana é $Q = (r^2/R^2)q$, onde q é a carga na face da barra. Portanto

$$E = \frac{q}{\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\alpha t^2}{2\pi\epsilon R^2},$$

onde o resultado obtido no item (a), $q = \alpha t^2/2$, foi usado.

(c) As linhas de campo magnético formam círculos que são concêntricos com o eixo da barra (eixo x), estando em planos paralelos às faces da barra.

(d) Use a lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Como caminho de integração escolha um círculo que coincida com uma linha de campo magnético. Suponha que o raio do caminho de integração seja r (com $r < R$) e que B seja a magnitude do campo para pontos sobre o caminho. Então $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B2\pi r$. Na região do corte a corrente é zero e apenas a corrente de deslocamento contribui no lado direito da equação de Ampère-Maxwell. Como temos

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = A\frac{dE}{dt} = \pi r^2 \frac{\alpha t}{\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\alpha t r^2}{\epsilon_0 R^2},$$

a equação de Ampère-Maxwell nos fornece

$$B2\pi r = \mu_0\epsilon_0 \frac{\alpha t r^2}{\epsilon_0 R^2}.$$

Portanto

$$B = \frac{\mu_0 \alpha t r}{2\pi R^2}.$$

O campo magnético dentro da barra, a uma distância r do seu eixo, é dado exatamente pela mesma expressão. Neste caso, somente a corrente de condução contribui no lado direito da lei de Ampère-Maxwell. Tome o caminho de integração como sendo um círculo centrado no eixo e paralelo às faces da barra. A corrente através do círculo é $(r^2/R^2)i$ e a equação de Ampère-Maxwell fornece

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}\, i,$$

de modo que

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 \alpha t r}{2\pi R^2},$$

onde substituimos i por αt.