SUOMALAISEN TIEDEAKATEMIAN TOIMITUKSIA
ANNALES ACADEMIÆ SCIENTIARUM FENNICÆ

SARJA
SERIES A

I. MATHEMATICA

259

ITERATION VON QUADRATWURZELOPERATIONEN

VON

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1958
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Einleitung.

1. Wir haben in einer kürzlich erschienenen Arbeit [2] die Iteration der reellen Polynome zweiten Grades für beliebige komplexe Werte der Variablen behandelt. Die Betrachtung der inversen Wurzeloperation führt zur Frage nach der Konvergenz von unendlichen Entwicklungen der Form

$$(p) = \pm\sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \cdots}}}\,, \tag{1,1}$$

wo p eine reelle positive Grösse bezeichnet. Von besonderer Bedeutung sind diejenigen unter solchen Ausdrücken, für welche die Zeichenfolge periodisch ist. Indem wir uns im Folgenden auf reelle Grössen einschränken, setzen wir voraus, dass sämtliche aus (p) durch Abbrechung erhaltenen endlichen Wurzelausdrücke

$$\pm\sqrt{p}\,,\quad \pm\sqrt{p \pm \sqrt{p}}\,,\quad \pm\sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p}}}\,, \ldots \tag{1,2}$$

reell sind.

Um die Bedeutung der periodischen Entwicklungen näher zu erklären, betrachten wir den Ausdruck

$$x_n = \pm\sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p + x}}}\,, \tag{1,3}$$

welcher vermittels der n ersten, d.h. äussersten Wurzeln von (1,1) gebildet ist. Der Ausdruck (1,3) definiert eine 2^n-deutige irrationale Funktion der reellen Variablen x. Die inverse Funktion

$$y_n = P_n(y) \qquad (y = x_n\,,\ \ y_n = x) \tag{1,4}$$

besteht aus einem Polynom vom Grade 2^n, welches aus dem quadratischen Polynom

$$y_1 = y^2 - p \tag{1,5}$$

durch n-fache Iteration erhalten wird.

Es sei nun z ein Fixpunkt der Abbildung (1,4), also eine Wurzel der Gleichung

$$P_n(y) - y = 0 \,. \tag{1,6}$$

Wenn wir in (1,3) sowohl x_n als x durch z ersetzen und die so erhaltene Operation

$$z = \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p + z}}} \tag{1,7}$$

in unbegrenzter Weise iterieren, erhalten wir für den Fixpunkt z eine formale Entwicklung in der Form eines unendlichen n-periodischen Ausdrucks (p). Unsere Hauptaufgabe besteht in der Aufstellung derjenigen Bedingungen, unter denen für z ein Ausdruck in der Form eines konvergenten Ausdrucks (p) gültig ist.

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist, dass der betreffende reelle Fixpunkt z ein attraktiver Fixpunkt für (1,3), d.h. ein repulsiver Fixpunkt für (1,4) ist. Dies findet statt, wenn der Multiplikator, d.h. die Ableitung von (1,4) für $y = z$ dem absoluten Betrage nach > 1 ist. In diesem Falle gibt es ein den Punkt z enthaltendes Intervall Δ, dessen Punkte bei der Iteration von (1,3) gegen den Punkt z konvergieren. Notwendig und hinreichend für die Anwendbarkeit der Entwicklung (p) ist, dass das genannte Attraktionsintervall Δ den Punkt $x = -p$ (oder den Punkt $x = 0$) als inneren Punkt enthält.

2. Wir bemerken ferner, dass die Gleichung (1,6) eine Abelsche Gleichung ist, deren Wurzeln aus gewissen unter ihnen durch Iteration der quadratischen Operation (1,5) erhalten werden können. Um dies einzusehen, gehen wir von einer beliebigen, nicht notwendig reellen Wurzel z_1 von (1,6) aus. Wegen

$$P_{n+1}(y) = P_n^2(y) - p \tag{2,1}$$

gilt dann für $z_2 = P(z_1)$

$$P_n(z_2) = P_{n+1}(z_1) = P_n^2(z_1) - p = z_1^2 - p = z_2 \,,$$

woraus hervorgeht, dass mit z_1 zugleich z_2 und allgemein sämtliche Grössen

$$z_1 \,,\; z_\nu = P_\nu(z_{\nu-1}) \,, \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots) \tag{2,2}$$

der Gleichung (1,6) genügen. Wegen $z_{n+1} = z_1$ ist allgemein $z_{\nu+n} = z_\nu$.

Ist nun z_μ die erste unter den Grössen (2,2), die gleich z_1 ist, so bilden die Wurzeln

$$z_1 = z_\mu^2 - p \,,\; z_2 = z_1^2 - p \,,\; z_3 = z_2^2 - p \,, \ldots ,\; z_\mu = z_{\mu-1}^2 - p \tag{2,3}$$

einen Zyklus μ:ter Ordnung Z_μ, wobei μ ein Teiler von n ist. Ist speziell $\mu = n$, so werden wir die Wurzeln (2,3) und den zugehörigen Zyklus primitiv nennen. Ist N die Anzahl der primitiven Wurzeln von (1,6) und also $m = \frac{N}{n}$ die Anzahl der primitiven Zyklen, so wird die algebraische Auflösung der Gleichung (1,6) auf die Auflösung von m einfachen Abelschen Gleichungen und einer Resolvente m:ten Grades zurückgeführt. Für die kleinsten Werte von n können die zugehörigen Werte von N und m aus der folgenden Tabelle entnommen werden:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	2	1	2	3	6	9	18	30	56
N	2	2	6	12	30	54	126	240	504

Aus dem Ausdruck

$$s = 2^\mu z_1 z_2 \ldots z_\mu$$

des Multiplikators von Z_μ geht hervor, dass der Zyklus für (1,4) repulsiv und also für (1,3) attraktiv ist, wenn

$$|z_1 z_2 \ldots z_\mu| > \frac{1}{2^\mu}. \tag{2,4}$$

Allgemeine Betrachtungen.

3. Es sei Z_n ein Zyklus n:ter Ordnung mit den reellen Fixpunkten (2,3), wo $\mu = n$. Diese Punkte werden in umgekehrter Reihenfolge

$$\lambda_{\nu+1} = \pm\sqrt{p + \lambda_\nu} \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ \lambda_0 = \lambda_n, \ \lambda_\nu = z_{n-\nu} \end{pmatrix} \tag{3,1}$$

durch die irrationalen Abbildungen

$$x_{\nu+1} = \pm\sqrt{p + x_\nu} = S_\nu(x_\nu) \tag{3,2}$$

erhalten. Wegen der Realität der Fixpunkte gelten dann die Ungleichungen

$$\lambda_\nu \geqq -p. \tag{3,3}$$

Wir wählen die Bezeichnung so, dass der erste Fixpunkt λ_1 der kleinsten Zahl λ_ν entspricht.

Der Punkt λ_1 ist Fixpunkt für die zusammengesetzte Abbildung

$$x' = A_n(x) = S_1 S_2 \ldots S_n, \tag{3,4}$$

die übrigen sind Fixpunkte für die aus (3,4) durch zyklische Permutation erhaltenen Abbildungen. Wir nennen ferner den Zyklus Z_n positiv oder negativ, je nachdem ob die Anzahl der $-$ Zeichen in (3,1), also der negativen Fixpunkte, gerade oder ungerade ist.

4. Bevor wir weitergehen, wollen wir den speziellen Fall $p = 2$ näher betrachten.

Wir behaupten, dass sämtliche Fixpunkte jedes Zyklus, also alle Wurzeln der Gleichung (1,6), dann reell sind. In der Tat ergibt sich aus (1,5) für $p = 2$, $|y| > 2$

$$y_1 - y = (y + 1)(y - 2) > 0 ,$$

woraus folgt, dass keine reelle Wurzel von (1,6) absolut > 2 ist. Wir können somit alle solche Wurzeln in der Form

$$y = 2 \cos t \tag{4,1}$$

darstellen. Hieraus folgt $y_1 = 2 \cos 2\,t$ und allgemein

$$y_n = 2 \cos 2^n t .$$

Die Gleichung (1,6) ist somit äquivalent mit der Gleichung

$$\cos 2^n t = \cos t ,$$

welche die 2^n verschiedenen Lösungen

$$t = \frac{2\pi m}{2^n - 1}, \quad t = \frac{2\pi m'}{2^n + 1}, \begin{pmatrix} m = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots\,, 2^{n-1} - 1 \\ m' = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots\,, 2^{n-1} \end{pmatrix} \tag{4,2}$$

besitzt. Damit ist bewiesen, dass sämtliche Fixpunkte von (1,6) für $p = 2$ reell und in der Form (4,1) darstellbar sind.

Wegen der Stetigkeit der Lage der Fixpunkte in ihrer Abhängigkeit von p ergibt sich hieraus der

Satz 1. *Es gibt für jedes n eine Zahl p_n derart, dass die Fixpunkte von* (1,6) *sämtlich reell für $p > p_n$ sind.*

Um den obigen Satz zu ergänzen, erinnern wir an unser früheres Ergebnis [1,2], wonach für $p \geqq 2$ die Punkte der komplexen y-Ebene bei der Iteration von (1,5) gegen den unendlich fernen Punkt konvergieren, von einer gewissen auf der reellen Achse liegenden Menge von Punkten abgesehen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Gleichung (1,6) für $p \geqq 2$ keine imaginäre Wurzel besitzen kann. Alle Fixpunkte von (1,4) sind also für $p \geqq 2$ reell. Dass sie zugleich attraktiv sind, kann in indirekter Weise bewiesen werden. Denn wäre ein Zyklus für (3,4) repulsiv und somit für

(1,4) attraktiv, so würde die Attraktion in einem zweidimensionalen Gebiet stattfinden, was dem Obigen widerspricht, weil das Attraktionsgebiet des unendlich fernen Punktes u.a. sämtliche nichtreellen Punkte der Ebene enthält. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Wir behaupten nun, dass die Abbildung (3,4) für $p \geqq 2$ den einzigen Fixpunkt λ_1 hat.

Wir nehmen zum Beweis indirekt an, es seien bei (3,4) zwei oder mehrere Fixpunkte vorhanden. Es seien dann λ_1 und λ zwei benachbarte Fixpunkte und z.B. $\lambda > \lambda_1$. Auf dem Intervall $\Delta(\lambda, \lambda_1)$ ist dann die Funktion

$$A_n(x) - x \tag{4,3}$$

eindeutig und stetig, sie ist ferner < 0 in der Nähe von λ_1 und > 0 in der Nähe von λ. Zwischen den Punkten λ_1, λ müsste dann wenigstens eine Nullstelle von (4,3) existieren, also ein Fixpunkt von $A_n(x)$. Durch diesen Widerspruch ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus dem Obigen folgt, dass die Zeichenfolge für die Fixpunkte zweier Zyklen verschieden ist, weil andernfalls die Funktion (3,4) für die beiden Zyklen identisch wäre.

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Fixpunkte und der zugehörigen Multiplikatoren von p folgt aus dem Obigen für einen beliebigen reellen Zyklus n:ter Ordnung Z_n die Existenz einer Zahl $p(Z_n)$ derart, dass für

$$p > p(Z_n) \tag{4,4}$$

die zugehörige Operation $A_n(x)$ einen einzigen Fixpunkt hat und dass ferner die Zeichenfolge für zwei verschiedene Zyklen n:ter Ordnung voneinander verschieden sind.

Zur Bestimmung der Zahl $p(Z_n)$ bemerken wir, dass die Zeichenfolge in (3,1) sich nur so verändern kann, dass einer der Fixpunkte des Zyklus gleich Null wird. Weil der vorangehende Fixpunkt dann $= -p$ wird, kann dieses nur gleich λ_1 sein. Hieraus geht hervor, dass die gesuchte Zahl $p(Z_n)$ der Gleichung

$$A_n(-p) = -p \tag{4,5}$$

genügt.

5. Nach diesen Vorbereitungen kann man nun Bedingungen dafür aufstellen, dass die Fixpunkte eines Zyklus in der Form (1,1) darstellbar sind.

Es sei Z_n zuerst ein positiver Zyklus. Wir lassen den Punkt x das Intervall $\Delta(-p, \lambda_1)$ durchlaufen, wo $\lambda_1 < 0$ den ersten Fixpunkt des Zyklus bezeichnet. Dann beschreibt allgemein der Punkt x_ν das Intervall $\Delta_\nu(A_\nu(-p), \lambda_{\nu+1})$, wo $\lambda_{\nu+n} = \lambda_\nu$. Insbesondere der Punkt x_n beschreibt ein Intervall mit dem Endpunkt λ_1, welches ein echter Teil von Δ unter der Bedingung

$$A_n(-p) > -p \tag{5,1}$$

ist. Dann ist allgemein $\Delta_{(k+1)n}$ ein echter Teil von Δ_{kn}, und die linken Endpunkte der Intervalle $A_{kn}(-p)$ bilden eine monoton wachsende Folge von Zahlen $< \lambda_1$. Ihr Grenzwert, der einen Fixpunkt von Z_n gibt, muss nach dem Obigen mit λ_1, dem einzigen Fixpunkt von $A_n(x)$ zusammenfallen, weil die Bedingung (5,1) mit (4,4) identisch ist. Es gilt also die Darstellung

$$\lambda_1 = \lim_{k \to \infty} A_{kn}(-p), \tag{5,2}$$

wo rechts eine periodische Entwicklung der Form (p) auftritt.

Unsere Bedingung (5,1) für die Darstellbarkeit von λ_1 in der Form (p) kann nicht verschärft werden. Denn für $A_n(-p) < -p$ werden die zu $A_n(-p)$ gehörigen Näherungsausdrücke (1,2) imaginär.

Es sei zweitens Z_n ein negativer Zyklus. Jetzt hat das Intervall Δ_n den Punkt λ_1 als linken Endpunkt und erst das Intervall Δ_{2n} als rechten. Die der Bedingung (5,2) entsprechende Bedingung lautet jetzt

$$A_{2n}(-p) > -p\,. \tag{5,3}$$

Man erkennt leicht, dass die Bedingung (5,1) eine Folgerung der Bedingung (5,3) ist und ferner, dass die Bedingung (5,3) für die Konvergenz von (1,1) auch notwendig ist.

Zusammenfassend können wir also den folgenden Satz aussprechen.

Satz 2. *Notwendig und hinreichend dafür, dass die Fixpunkte eines primitiven Zyklus n:ter Ordnung in der Form* (p) *darstellbar sind, ist, dass* p *der Ungleichung* (5,1) *oder* (5,3) *genügt, je nachdem ob der Zyklus positiv oder negativ ist.*

6. Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass unsere Bedingungen durch einfache hinreichende Bedingungen ersetzt werden können.

Es sei M die grösste Anzahl von einander folgenden $+$ Zeichen in (3,1). Offenbar ist

$$M \leqq n-2 \quad \text{oder} \quad M \leqq n-1 \tag{6,1}$$

je nachdem ob der betreffende Zyklus positiv oder negativ ist. Wir bezeichnen kurz mit

$$\sqrt[]{_m(p)} = \sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p + \ldots + \sqrt{p}}}} \tag{6,2}$$

den rechts stehenden mit m Wurzelzeichen gebildeten und mit lauter $+$ Zeichen versehenen Ausdruck. Wir haben dann in der Ungleichung

$$p > \sqrt{{}_{M+1}(p)} \tag{6,3}$$

eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (5,1) bzw. (5,3). Wenn insbesondere

$$p > \sqrt{{}_{n-1}(p)} \tag{6,4}$$

bzw.

$$p > \sqrt{{}_{n}(p)}\,, \tag{6,5}$$

so sind sämtliche positive bzw. negative Zyklen einer Ordnung $\leqq n$ in der Form (p) darstellbar.

Um den Bedingungen (6,4), (6,5) eine einfachere Form zu gewinnen, führen wir die Grössen

$$G_m(p) = y_m(0)$$

ein, welche Polynome 2^{m-1}:ten Grades von p sind, die der Rekursionsgleichung

$$G_{m+1}(p) = G_m^2(p) - p$$

genügen. Die ersten unter ihnen sind

$$G_1(p) = -p\,, \quad G_2(p) = p^2 - p\,, \quad G_3(p) = (p^2 - p)^2 - p\,.$$

Aus

$$G_m(2) = 2 \quad \text{für} \quad m > 1\,, \quad G_{m+1}(p) = -p \quad \text{für} \quad G_m(p) = 0$$

geht hervor, dass zwischen einer Nullstelle p_m von $G_m(p)$ und der Stelle $p = 2$ stets eine Nullstelle p_{m+1} von G_{m+1} gelegen ist. Ist nun insbesondere p_n die grösste Nullstelle von $G_n(p)$, so gilt $G_n(p) > 0$ für $p > p_n$. Es gilt somit der

Satz 3. *Zur Konvergenz der Entwicklungen (p) für die Fixpunkte eines primitiven Zyklus n:ter Ordnung ist es hinreichend, dass p der Bedingung*

$$p > p_n \quad \text{bzw.} \quad p > p_{n+1} \tag{6,6}$$

genügt, je nachdem ob der Zyklus positiv oder negativ ist.

Für die ersten unter den Zahlen p_n findet man durch Interpolation die Näherungswerte

$$p_1 = 1\,, \quad p_2 = 1{,}77\,, \quad p_3 = 1{,}92\,, \quad p_4 = 1{,}97\,. \tag{6,7}$$

Allgemein gilt

$$p_n < 2\,, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = 2\,.$$

Wenn insbesondere $p \geqq 2$, sind sämtliche Fixpunkte jedes Zyklus beliebiger Ordnung in der Form (p) darstellbar.

Wir wollen zum Abschluss neben p_n noch die Zahlen p_n' und p_n'' einführen, welche die untere Grenze derjenigen p-Werte bezeichnen, für welche sämtliche Fixpunkte der Abbildung (1,4) reell bzw. reell und attraktiv für (1,3) sind. Wegen der Definition gelten dann die Ungleichungen

(6,8) $$p_n'' < p_n' < p_n < 2\,.$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir im Folgenden die ersten Fälle $n = 1\,, 2\,, 3$ einem genaueren Studium unterwerfen.

Fall $n = 1$.

7. Die zugehörige Gleichung (1,6)

(7,1) $$y^2 - y - p = 0$$

hat die Wurzeln

(7,2) $$q_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + p}\,,$$

die schon für $p \geqq -\frac{1}{4}$ reell sind. Ferner ist für $p > 0$

$$q_1 > 0\,, \quad q_2 < 0\,.$$

Man hat hier zwei eingliedrige Zyklen, von denen der zum Fixpunkt q_1 gehörige stets und der zum Fixpunkt q_2 entsprechende für $p > \frac{3}{4}$ attraktiv ist.

Die zum Fixpunkte q_1 gehörige Abbildung (3,4) hat den Ausdruck

(7,3) $$x_1 = \sqrt{p + x}\,.$$

Die durch Iteration von (7,3) erhaltenen Grössen

$$x_{\nu+1} = \sqrt{p + x_\nu}$$

sind reell für $x \geqq -p$.

Aus

$$x_{\nu+1} - q_1 = \frac{x_\nu - q_1}{x_{\nu+1} + q_1}$$

und

$$x_{\nu+1} - x_\nu = \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{x_{\nu+1} + x_\nu}$$

geht hervor, dass die Folge

$$x\,, x_1\,, x_2\,, \ldots$$

für $x < q_1$ monoton wachsend und $< q_1$, für $x > q_1$ monoton abnehmend und $> q_1$ ist. In den beiden Fällen hat man den Grenzwert

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = q_1 . \tag{7,4}$$

Wird speziell $x = -p$ gewählt, so bekommt man für q_1 den bekannten für $p > 0$ konvergenten Ausdruck

$$q_1 = \sqrt{p + q_1} = \sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p + \ldots}}} \tag{7,5}$$

Für $p = 0$ ist $x_{\nu+1} = \sqrt{x_\nu}$. Jetzt ist $q_1 = 1$, und der Grenzwert (7,4) existiert nur für $x > 0$. Dagegen für $x = 0$ ist $x_\nu = 0$ und die Entwicklung (7,5) nicht mehr gültig.

8. Zur Untersuchung der zum zweiten Fixpunkt q_2 gehörigen Abbildung ist es zweckmässig, die Wurzeln

$$\tilde{q}_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{p - \tfrac{3}{4}} \tag{8,1}$$

der Gleichung

$$y^2 + y - p + 1 = 0 \tag{8,2}$$

einzuführen, die nach Division von $y_2 - y$ mit $y_1 - y$ erhalten wird. Die Punkte (8,1), die Fixpunkte der Abbildung $y_2 = P_2(y)$ sind, werden durch (1,5) miteinander permutiert.

Der zu q_2 gehörige Zyklus mit dem Ausdruck

$$x_1 = -\sqrt{p + x} \tag{8,3}$$

ist, wie schon erwähnt, attraktiv für $p > \frac{3}{4}$.

Es sei zuerst $p > 1$. Für die Realität der Grössen x_ν ist dann notwendig und hinreichend, dass x dem Intervall

$$-p \leqq x \leqq p^2 - p \tag{8,4}$$

angehört. Dann kann $x = -p$ in (8.3) gewählt werden, und man erhält für q_2 den für $p > 1$ geltenden konvergenten Ausdruck

$$q_2 = -\sqrt{p + q_2} = -\sqrt{p - \sqrt{p - \sqrt{p - \ldots}}} \tag{8,5}$$

Sei zweitens $p = 1$. Dann gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = q_2$$

nur im offenenen Intervalle $-1 < x < 0$, und die Entwicklung (8,5) ist nicht mehr gültig. In der Tat ist für $x = -1$ (und $x = 0$) alternierend $x_\nu = 0, -1$ und der Ausdruck (8,5) divergent.

Es sei schliesslich $p < 1$. Jetzt sind die Grössen x_ν reell nur im Intervall

$$(8,6) \qquad -p < \tilde{q}_2 \leqq x \leqq \tilde{q}_1 < 0 \,,$$

dessen Endpunkte bei Ausführung von (1,5) miteinander permutiert werden. Das Attraktionsintervall (8,6) von q_2 enthält nicht den Punkt $x = -p$, und die Entwicklung (8,5) ist wieder nicht anwendbar.

Fall $n = 2$.

9. Wir haben schon oben gesehen, dass die Gleichung $y_2 = y$ die primitiven Wurzeln (8,1) besitzt. Diese bilden einen negativen Zyklus zweiter Ordnung mit dem Multiplikator

$$s = 4\,\tilde{q}_1\,\tilde{q}_2 = 4\,(1 - p)\,.$$

Die Fixpunkte (8,1) sind reell für $p \geqq \frac{3}{4}$ und attraktiv für $p > \frac{5}{4}$. Für $p > 1$ ist $\tilde{q}_1 > 0$ und $\tilde{q}_2 < 0$.

Wir setzen

$$(9,1) \qquad x_1 = \sqrt{p + x}\,, \qquad x_2 = -\sqrt{p + x_1}$$

und erhalten durch Zusammensetzung die Abbildung

$$(9,2) \qquad x_2 = -\sqrt{p + \sqrt{p + x}}$$

mit dem Fixpunkt $\tilde{q}_2$. Der Punkt $\tilde{q}_1$ ist seinerseits Fixpunkt für die Abbildung

$$(9,3) \qquad x_2 = \sqrt{p - \sqrt{p + x}}\,.$$

Für $p > 1$ gelten zwischen den Fixpunkten (8,1) die Relationen

$$(9,4) \qquad \tilde{q}_1 = \sqrt{p + \tilde{q}_2}\,, \qquad \tilde{q}_2 = -\sqrt{p + \tilde{q}_1}\,.$$

Die Bedingung (5,3) lautet im vorliegenden Falle

$$(9,5) \qquad p > \sqrt{p + \sqrt{p - \sqrt{p}}}$$

und sie ist erfüllt für

$$(9,6) \qquad p > \tilde{p}_2 \approx 1{,}32\,.$$

Unter dieser Bedingung gelten für die Fixpunkte (8,1) die konvergenten Entwicklungen

$$\text{(9,7)}\qquad \begin{aligned} \tilde q_1 &= \sqrt{p-\sqrt{p+\tilde q_1}} = \sqrt{p-\sqrt{p+\sqrt{p-\sqrt{p+\cdots}}}} \\ \tilde q_2 &= -\sqrt{p+\sqrt{p+\tilde q_2}} = -\sqrt{p+\sqrt{p-\sqrt{p-\sqrt{p+\cdots}}}}\,. \end{aligned}$$

Fall $n=3$.

10. Jetzt ist die Gleichung (1,6) vom Grade 8. Nach Division des Polynomes $y_3 - y$ mit $y_1 - y$ bleibt eine Gleichung sechsten Grades übrig, für welche man durch Ausrechnung den Ausdruck

$$\text{(10,1)}\qquad \begin{aligned} &y^6 + y^5 + (1-3p)\,y^4 + (1-2p)\,y^3 \\ &+ (1-3p+3p^2)\,y^2 + (1-p)^2\,y + 1 - p\,(1-p)^2 = 0 \end{aligned}$$

findet. Ihre Wurzeln bilden zwei Zyklen dritter Ordnung

$$\text{(10,2)}\qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\,, \qquad (\tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2, \tilde\lambda_3)\,.$$

Zur algebraischen Auflösung von (10,1) bilden wir die symmetrischen Funktionen

$$\text{(10,3)}\qquad t_1 = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,, \qquad t_2 = \tilde\lambda_1\,\tilde\lambda_2\,\tilde\lambda_3\,.$$

Durch Ausrechnung findet man

$$t_1 + t_2 = 2 - p\,.$$

Weil ferner nach (10,1)

$$t_1\,t_2 = 1 - p\,(1-p)^2\,,$$

so genügen die Grössen t_1, t_2 der quadratischen Gleichung

$$\text{(10,4)}\qquad t^2 + (p-2)\,t + 1 - p\,(p-1)^2 = 0.$$

Ihre Wurzeln

$$\text{(10,5)}\qquad t = \frac{2-p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{4p-7}$$

sind reell für $p \geqq \frac{7}{4}$.

Die algebraische Auflösung von (10,1) wird nunmehr auf die Auflösung der einfachen Abelschen Gleichungen

$$\text{(10,6)}\qquad p\,x^3 + (t_\nu - 1 + p)\,x^2 + (t_\nu - 1 - p^2)\,x - p\,t_\nu = 0\,, \quad (\nu = 1, 2)$$

zurückgeführt. Weil die Wurzeln von (10,6) voneinander durch die reelle Operation (1,5) abgeleitet werden können, sind sie gleichzeitig reell. Dies ist nach dem Obigen der Fall, wenn $p \geqq \frac{7}{4}$.

Aus dem Ausdruck $s_\nu = 8\,t_\nu$ des zum Zyklus (t_ν) gehörigen Multiplikators ergibt sich folgendes.

Wegen $t_1 > \frac{1}{8}$ ist der Zyklus (t_1) stets attraktiv. Aus

$$t_2 = 1 - \frac{p}{2}\,(1 + \sqrt{4\,p - 7})\,,$$

wo rechts eine bei wachsendem p monoton abnehmende Funktion von p vorkommt, folgt, dass der Zyklus (t_2) attraktiv nur für $p > p_3{}'$ ist, wo $p_3{}'$ die positive Wurzel der Gleichung $t_2 = -\frac{1}{8}$, also der kubischen Gleichung

$$p\,(p-1)^2 + \frac{1}{8}\,(p-2) - \frac{65}{64} = 0\,,$$

bezeichnet. Durch Interpolation findet man $p_3{}' = 1{,}755$.

11. Für genügend grosse Werte von p genügen die Wurzeln λ_ν den Ungleichungen

$$\lambda_1 < 0\,,\quad \lambda_2 < 0\,,\quad \lambda_3 > 0\,,$$

und sie bilden einen positiven Zyklus mit den Relationen

$$(11{,}1)\qquad \lambda_1 = -\sqrt{p+\lambda_3}\,,\quad \lambda_2 = -\sqrt{p+\lambda_1}\,,\quad \lambda_3 = \sqrt{p+\lambda_2}\,.$$

Die durch

$$(11{,}2)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{p+\sqrt{p-\sqrt{p+\lambda_1}}} \\ \lambda_2 &= -\sqrt{p-\sqrt{p+\sqrt{p+\lambda_2}}} \\ \lambda_3 &= \sqrt{p-\sqrt{p-\sqrt{p+\lambda_3}}} \end{aligned}$$

gegebenen Entwicklungen gelten für

$$(11{,}3)\qquad p > \sqrt{p+\sqrt{p}}\,,$$

also für $p > 1{,}77$.

Die Wurzeln $\tilde{\lambda}_\nu$ genügen für genügend grosse Werte von p den Ungleichungen

$$\tilde{\lambda}_1 < 0\,,\quad \tilde{\lambda}_2 > 0\,,\quad \tilde{\lambda}_3 > 0\,,$$

und sie bilden somit einen negativen Zyklus mit den Relationen

$$(11,4) \qquad \tilde{\lambda}_1 = -\sqrt{p+\tilde{\lambda}_3}\,, \quad \tilde{\lambda}_2 = \sqrt{p+\tilde{\lambda}_1}\,, \quad \tilde{\lambda}_3 = \sqrt{p+\tilde{\lambda}_2}\,.$$

Die Bedingung für die Gültigkeit der zugehörigen Entwicklungen

$$(11,5) \qquad \begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= -\sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p+\tilde{\lambda}_1}}} \\ \tilde{\lambda}_2 &= \sqrt{p-\sqrt{p+\sqrt{p+\tilde{\lambda}_2}}} \\ \tilde{\lambda}_3 &= \sqrt{p+\sqrt{p-\sqrt{p+\tilde{\lambda}_3}}} \end{aligned}$$

lautet jetzt

$$(11,6) \qquad p > \sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p-\sqrt{p+\sqrt{p}}}}}\,.$$

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn

$$p > \sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p}}}\,,$$

also für $p > 1{,}92$.

Fall $p = 2$.

12. Der Kürze halber wollen wir die betreffenden periodischen Ausdrücke durch die Zeichenfolge der Perioden ersetzen. Z.B. bedeutet $(+-+)$ den dreiperiodischen Ausdruck

$$(+-+) = +\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}}$$

Nach N:4 werden die Fixpunkte von $y_n = P_n(y)$ im Falle $p = 2$ aus

$$(12,1) \qquad 2\cos\frac{2\pi m}{2^n-1}\,, \quad 2\cos\frac{2\pi m'}{2^n+1}\,, \quad \begin{pmatrix} m = 0\,,1\,,2\,,\ldots\,2^{n-1}-1 \\ m' = 1\,,2\,,3\,,\ldots\,2^{n-1} \end{pmatrix}$$

erhalten. Für $n = 1$ bekommt man hieraus

$$(12,2) \qquad q_1 = 2 = (+)\,, \quad q_2 = -1 = (-)\,,$$

für $n = 2$

$$(12,3) \qquad \tilde{q}_1 = 2\cos\frac{2\pi}{5} = (+-)\,, \quad \tilde{q}_2 = 2\cos\frac{4\pi}{5} = (-+)\,.$$

Für $n = 3$ hat man zwei Zyklen mit folgenden Fixpunkten und Entwicklungen:

$$\lambda_1 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = (-+-)\,,\quad \lambda_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = (--+)\,,$$

$$\lambda_3 = 2\cos\frac{2\pi}{7} = (+--)\,;$$

$$\tilde{\lambda}_1 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = (-++)\,,\quad \tilde{\lambda}_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} = (+-+)\,,$$

$$\tilde{\lambda}_3 = 2\cos\frac{2\pi}{9} = (++-)\,. \tag{12,4}$$

Für $n = 4$ gibt es drei primitive Zyklen mit folgenden Fixpunkten und Entwicklungen

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\cos\dfrac{16\pi}{15} = (-++-)\,, & \lambda_2 = 2\cos\dfrac{8\pi}{15} = (--++)\,, \\ \lambda_3 = 2\cos\dfrac{4\pi}{15} = (+--+)\,, & \lambda_4 = 2\cos\dfrac{2\pi}{15} = (++--)\,, \end{cases} \tag{12,5}$$

$$\begin{cases} \lambda_1' = 2\cos\dfrac{16\pi}{17} = (-+++)\,, & \lambda_2' = 2\cos\dfrac{8\pi}{17} = (+-++)\,, \\ \lambda_3' = 2\cos\dfrac{4\pi}{17} = (++-+)\,, & \lambda_4' = 2\cos\dfrac{2\pi}{17} = (+++-)\,, \end{cases} \tag{12,6}$$

$$\begin{cases} \lambda_1'' = 2\cos\dfrac{14\pi}{17} = (---+)\,, & \lambda_2'' = 2\cos\dfrac{10\pi}{17} = (--+-)\,, \\ \lambda_3'' = 2\cos\dfrac{12\pi}{17} = (-+--)\,, & \lambda_4'' = 2\cos\dfrac{6\pi}{17} = (+---)\,. \end{cases} \tag{12,7}$$

Verzeichnis der früheren Arbeiten des Verfassers.

[1] Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels. - Ann. Acad. Sci. Fennicae, A. I. Mathematica 253 (1958).
[2] Iteration der reellen Polynome zweiten Grades. - ibidem 256 (1958).
[3] Sur une généralisation de la moyenne arithmétique-géometrique de Gauss. - Comptes Rendus à l'Acad. des sciences, Paris (1958).
[4] Eräs aritmeettis-geometrisen keskiarvon yleistys-Arkhimedes (1958).

Gedruckt XI. 1958.