

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

336/3

ITERATION DER REELLEN
POLYNOME ZWEITEN GRADES III

VON

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1963
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

1. Einleitung

1. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, neue Beiträge zur Iterationstheorie der reellen quadratischen Polynome zu liefern. Indem wir uns im folgenden auf die reellen Werte der Variablen einschränken, ist unsere Absicht, ein allgemeines Verfahren zur Bildung von attraktiven Zyklen des gegebenen Polynoms darzustellen. Unsere Methode wird auf die Bestimmung von Nullzyklen des Polynomes begründet, also Zyklen, deren Multiplikator gleich null ist und deren Punkte somit stark attraktive Fixpunkte für das zugeordnete iterierte Polynom sind.

Es sei

$$(1,1) \quad y_1 = y^2 - p$$

das gegebene Polynom, wo p ein reeller Parameter ist. Durch n -fache Iteration von (1,1) gelangt man zu einem Polynom

$$(1,2) \quad y_n = P_n(y)$$

vom Grade 2^n , dessen Koeffizienten ganze rationale Funktionen von p sind. Insbesondere ist der letzte Koeffizient

$$(1,3) \quad P_n(0) = G_n(p)$$

ein Polynom von p vom Grade 2^{n-1} . Die ersten unter diesen Polynomen sind

$$(1,4) \quad G_1(p) = -p, \quad G_2(p) = p^2 - p, \quad G_3(p) = (p^2 - p)^2 - p,$$

und sie können vermittels der Rekursionsformel

$$(1,5) \quad G_{n+1}(p) = G_n^2(p) - p$$

berechnet werden.

2. Es sei nun y_0 ein endlicher Fixpunkt von (1,2) und

$$(2,1) \quad y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n = y_0$$

die daraus vermittels der Iteration von (1,1) erhaltenen Bildpunkte, welche bei Anwendung von (1,1) miteinander zyklisch permutiert werden. Aus dem Ausdruck

$$(2,2) \quad S = P'_n(y_v) = 2^n y_0 y_1 \dots y_{n-1}$$

des Multiplikators des von den Punkten (2,1) gebildeten Zyklus Σ geht hervor, dass Σ attraktiv ist, wenn

$$|y_0 y_1 \dots y_{n-1}| < \frac{1}{2^n}.$$

Ist speziell $y_0 = 0$, so hat man es mit einem Nullzyklus zu tun. Ihre Punkte bestehen aus

$$(2,3) \quad -p, p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, p_{n-1} = 0,$$

wo $p_v = G_{v+1}(p)$ und

$$(2,4) \quad G_n(p) = 0.$$

Wie wir schon früher bewiesen haben [3], können attraktive Zyklen nur für die Parameterwerte des Intervalles

$$\frac{1}{4} < p < 2$$

vorkommen. Aus einem allgemeinen Satz von FATOU folgt, dass es höchstens einen attraktiven Zyklus gibt und dass ihre Punkte zum Intervall

$$-q_1 < y < q_1$$

gehören, wo

$$q_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + p}$$

ein repulsiver Fixpunkt von (1,1) ist.

Bei der Bestimmung der attraktiven Zyklen spielen die reellen Nullstellen der Polynome $G_n(p)$ eine wichtige Rolle. Denn ist p_0 eine solche Nullstelle, so gibt es, wegen der Stetigkeit von $S(p)$, ein Intervall $|p - p_0| < \varepsilon$, für dessen p -Werte stets ein attraktiver Zyklus existiert.

Aus der Definition der G -Polynome geht hervor, dass jede Nullstelle des Polynoms $G_n(p)$ zugleich eine Nullstelle sämtlicher Polynome G_{qn} ($q = 2, 3, \dots$) ist. Insbesondere gilt

$$G_n(0) = 0, \quad G_{2n}(1) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Wir können uns somit auf die primitiven Nullstellen von $G_n(p)$ einschränken, d.h. Nullstellen p_0 , für welche $G_m(p_0) \neq 0$ für $m < n$ ist.

2. Darstellung der reellen Nullstellen des Polynoms $G_n(p)$ durch Radikale

3. Aus der Gleichung

$$(3,1) \quad G_n(p) = 0$$

ergibt sich zunächst formal für ihre Lösungen die Darstellung

$$(3,2) \quad p = \sqrt[n]{p \pm \sqrt[n-1]{p \pm \dots \pm \sqrt[n-2]{p}}}$$

als Radikalgleichung. Es ist eine für das Folgende zentrale Frage, welche unter den Gleichungen (3,2) reelle Lösungen der Gleichung (3,1) liefern.

Als einfachste Beispiele solcher Gleichungen geben wir die für $n = 3$ erhaltenen zweigliedrigen Gleichungen

$$p = \sqrt{p + \sqrt{p}}, \quad p = \sqrt{p - \sqrt{p}},$$

von denen nur die erste eine nichttriviale Nullstelle ($p \neq 0, 1$) des Polynoms $G_3(p)$ liefert, die den approximativen Wert

$$p \approx 1,7548776662$$

hat. Unter den dreigliedrigen Gleichungen

$$p = \sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p}}}, \quad p = \sqrt{p + \sqrt{p - \sqrt{p}}},$$

$$p = \sqrt{p - \sqrt{p + \sqrt{p}}}, \quad p = \sqrt{p - \sqrt{p - \sqrt{p}}}$$

haben nur die beiden oberen nichttriviale Lösungen, nämlich

$$p \approx 1,9407998065, \quad p \approx 1,3107026413,$$

welche also die einzigen primitiven Nullstellen des Polynoms $G_4(p)$ liefern.

4. Indem wir jetzt zur allgemeinen Lösung unserer Aufgabe übergehen, schreiben wir den rechts in (3,2) auftretenden Wurzel Ausdruck in der symbolischen Form

$$(4,1) \quad r = m_1^+ n_1^- m_2^+ n_2^- \dots m_q^+ n_q^-,$$

wenn die Folge der Vorzeichen der Radikale gleich

$$(4,2) \quad \begin{matrix} m_1 & n_1 & m_2 & n_2 & \dots & m_q & n_q \\ + & - & + & - & \dots & + & - \end{matrix}$$

ist.

Es seien nun r und

$$\tilde{r} = \tilde{m}_1^+ \tilde{n}_1^- \tilde{m}_2^+ \tilde{n}_2^- \dots \tilde{m}_q^+ \tilde{n}_q^-$$

zwei Radikale gleicher Ordnung

$$N = \sum_{v=1}^q (m_v^+ + n_v^-) = \sum_{v=1}^q (\tilde{m}_v^+ + \tilde{n}_v^-),$$

die also durch Nullsetzen des Polynoms G_{N+2} entstehen. Unter der Annahme, dass die beiden Radikale r und \tilde{r} für einen gegebenen reellen Wert p reell sind, gilt die Ungleichung $\tilde{r} > r$ unter den folgenden Bedingungen, wie leicht bestätigt werden kann:

Erstens wenn $\tilde{m}_1 > m_1$. Zweitens wenn $\tilde{m}_1 = m_1$ und gleichzeitig $\tilde{n}_1 < n_1$ bei geradem \tilde{n}_1 , dagegen $\tilde{n}_1 > n_1$ bei ungeradem n_1 usw. Allgemein bestätigt man, dass im Falle $\tilde{m}_1 = m_1, \tilde{n}_1 = n_1$ die Ungleichung $\tilde{r} > r$ bei ungeradem n_1 besteht, wenn

$$\tilde{r}_1 = (\tilde{m}_2^+ \tilde{n}_2^- \dots \tilde{m}_q^+ \tilde{n}_q^-) < r_1 = (m_2^+ n_2^- \dots m_q^+ n_q^-),$$

und bei geradem n_1 , wenn $\tilde{r}_1 > r_1$. Durch diese rekursive Regel kann man zwei beliebige reelle Radikale auch verschiedener Ordnung miteinander vergleichen.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Radikalgleichung

$$(4,3) \quad p = r(p) = m_1^+ n_1^- \dots m_q^+ n_q^-.$$

Für die Existenz einer reellen Lösung von (4,3) ist offenbar notwendig, dass sämtliche Teilradikale

$$r_v = m_v^+ n_v^- \dots m_q^+ n_q^- \quad (v = 2, 3, \dots, q)$$

für den betreffenden Wert reell sind, dass also $p \geq r_v$. Man hat also für die Existenz einer reellen Lösung von (4,3) die notwendigen Bedingungen

$$(4,4) \quad r \geq r_v, \quad (v = 2, 3, \dots, q).$$

Wir behaupten, dass unsere Bedingungen (4,4) auch hinreichend sind.

Zum Beweis lassen wir den Parameter p das Intervall Δ ($2 > p > 1$) beschreiben. Für den Anfangswert $p = 2$ sind offenbar alle Radikale r_v reell und $r < p$. In dem extremen Fall, wo $r(p)$ lauter + Zeichen enthält, ist $r(1) > 1$. Aus der Stetigkeit von $r(p)$ folgt aber, dass es im Intervalle Δ stets einen und offenbar nur einen einzigen Wert p gibt, für welchen $p = r(p)$. Wenn zweitens auch - Zeichen vorkommen, gelangt man schliesslich zu einem Wert p_0 , für welchen ein Teilradikal r_v gleich Null wird. Weil dann

$$(4,5) \quad p_0 - r(p_0) \leq p_0 - r_v(p_0) = 0,$$

so ist das Intervall

Man bekommt
mitive Lösungen
Wir wollen
Satz 1

(4,3)

besitzt reell

erfüllt sind

Es sei
einzigste pro

(4,6)

Ich habe

Dass sie
bezeichne
zu finden

Wir wollen
Hypothesen
sere Sätze

5. Na
monoton
Zeichen
folgender

Zum
 r und \tilde{r}

(5,1)

wo die
übereinst
Folgen.
Ist nun
Ordnung

(5,2)

zwischen

so ist damit bewiesen, dass die Gleichung (4,3) wenigstens eine Wurzel im Intervall Δ besitzt.

Man bestätigt leicht, dass in (4,5) das Gleichheitszeichen nur für imprimitive Lösungen bestehen kann.

Wir wollen unsere Resultate im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 1. Die Radikalgleichung

$$(4,3) \quad p = r(p)$$

besitzt reelle Lösungen stets und nur dann, wenn die Bedingungen

$$r \geq r_v \quad (v = 2, 3, \dots, q)$$

erfüllt sind.

Es sei p_0 eine primitive Lösung von (4,3). Offenbar ist $p = p_0$ die einzige primitive Lösung, wenn $r'(p_0) < 0$, d.h. wenn

$$(4,6) \quad p_0 > \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{v=1}^{N-2} \frac{1}{2^v p_1 p_2 \dots p_v} \right).$$

Ich habe das Bestehen dieser Bedingung in zahlreichen Fällen bestätigt. Dass sie allgemein gültig ist, ist meine Hypothese — im folgenden mit H bezeichnet —, für welche es mir nicht gelungen ist, einen allgemeinen Beweis zu finden.

Wir werden in den folgenden Untersuchungen die Richtigkeit unserer Hypothese H annehmen, um im Nachtrag diejenigen Modifikationen unserer Sätze zu geben, welche von H unabhängig sind.

5. Nach dem Obigen können die Radikale bestimmter Ordnung in eine monoton wachsende Folge geordnet werden, wo das letzte Glied lauter + Zeichen hat. Wir behaupten nun, dass man von einem Glied aus zum folgenden durch Abänderung eines einzigen Zeichens gelangt.

Zum Beweis unserer Behauptung betrachten wir zwei Glieder der Folge, r und $\tilde{r} > r$, mit den Entwicklungen

$$(5,1) \quad r = (\dots - \dots - \pm \pm), \quad \tilde{r} = (\dots + \dots + \pm \pm),$$

wo die mit \dots und \dots bezeichneten Zeichenfolgen miteinander bzw. übereinstimmen. Es sei α bzw. β die Anzahl der $-$ Zeichen in den genannten Folgen. Nach der in Nr. 4 gegebenen Regel ist $\alpha = 2n$ eine gerade Zahl. Ist nun erstens β ungerade, also $\beta = 2m + 1$, so liegt das Radikal n -ter Ordnung

$$(5,2) \quad \varrho = (\dots - \dots + \pm \pm)$$

zwischen r und \tilde{r} , also

(5,3)

$$r < \varrho < \tilde{r}.$$

Für $\beta = 2m$ hat das Radikal

$$\tilde{\varrho} = (\cdots + \cdots - \pm \pm)$$

die erforderte Eigenschaft. Wir haben also in den beiden genannten Fällen zwischen den Radikalen r und \tilde{r} ein neues reelles Radikal eingeschaltet. Dies gilt aber auch für die übrigen drei Fälle. Man hat nämlich im Falle

$$r = (\cdots + \cdots + \pm \pm), \quad \tilde{r} = (\cdots - \cdots - \pm \pm)$$

$$\varrho = (\cdots + \cdots - \pm \pm) \quad \text{für } \beta = 2m$$

$$\tilde{\varrho} = (\cdots - \cdots + \pm \pm) \quad \text{für } \beta = 2m + 1,$$

im Falle

$$r = (\cdots + \cdots - \pm \pm), \quad \tilde{r} = (\cdots - \cdots + \pm \pm)$$

$$\varrho = (\cdots - \cdots - \pm \pm), \quad \text{für } \beta = 2m$$

$$\tilde{\varrho} = (\cdots + \cdots + \pm \pm) \quad \text{für } \beta = 2m + 1$$

und im Falle

$$r = (\cdots + \cdots + \pm \pm), \quad \tilde{r} = (\cdots + \cdots - \pm \pm)$$

$$\varrho = (\cdots + \cdots + \pm \pm) \quad \text{für } \beta = 2m + 1$$

$$\tilde{\varrho} = (\cdots - \cdots - \pm \pm) \quad \text{für } \beta = 2m,$$

wie nach der Regel von Nr. 4 bestätigt werden kann.

Unsere Behauptung ist damit vollständig bewiesen.

Nach dem Obigen kann man auf Grund unserer Regel die Gesamtheit der reellen Nullstellen eines Polynoms $G_n(p)$ durch eine Zeichenfolge (4,2) darstellen, sobald man das erste Glied der Folge kennt, welche der kleinsten Nullstelle des Polynoms entspricht. Für die kleinsten Werte von n bestehen die betreffenden minimalen Radikale aus den Folgenden, wie leicht zu bestätigen ist:

$$n = 3: (+), \quad n = 4: (+ -), \quad n = 5: (+ - -), \quad n = 6: (+ - - -),$$

$$n = 7: (+ - - - -), \quad n = 8: (+ - - - + -),$$

$$n = 9: (+ - - - - -); \quad n = 10: (+ - - - + - + -).$$

Die Folgen selbst haben wir im Anhang in einer Tafel zusammengestellt.

6. Wir
der reeller
Es sei

(6,1)

die Fixpu

(6,2)

Man hat

(6,3)

Es sei nu

ergibt sic

 $\lambda_1 \approx p_n -$
 Σ ergibt

(6,4)

Es sei nu

wird. Se

Zyklus

Intervall

these E p_0 die n

Nun

(6,5)

in einen

Radikal

Hilfs

des Pro

(6,6)

stets be

Weil

sein -

gilt der

3. Die Anzahl der reellen Nullstellen der G -Polynome.

6. Wir sind jetzt in der Lage einen expliziten Ausdruck für die Anzahl der reellen Nullstellen der G -Polynome zu geben.

Es seien

$$(6,1) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \quad (N = 2^n)$$

die Fixpunkte von (1,2), also die Wurzeln der Gleichung

$$(6,2) \quad y_n - y = 0.$$

Man hat

$$(6,3) \quad \prod_{v=1}^N \lambda_v = G_n(p) = p_{n-1}, \quad \prod_{v=1}^N \lambda_v \cdot \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{\lambda_\mu} = 1.$$

Es sei nun $G_n(p_0) = 0$ und z.B. $\lambda_1 = 0$. Aus der zweiten Gleichung (6,3) ergibt sich $\prod_{v=2}^N \lambda_v = 1$. Für $p \approx p_0$ ist somit, wegen der ersten Gleichung, $\lambda_1 \approx p_{n-1}$. Für den Multiplikator des zum Fixpunkt λ_1 gehörigen Zyklus Σ ergibt sich hieraus für $p \approx p_0$ der approximative Ausdruck

$$(6,4) \quad S \approx -2^n p p_1 p_2 \dots p_{n-1}.$$

Es sei nun p_0 die kleinste reelle Nullstelle von $G_n(p)$, für welche $\lambda_1 = 0$ wird. Sei ferner \tilde{p}_0 derjenige Wert des Parameters p , für welchen der Zyklus Σ reell wird. Es ist dann $S = +1$ für $p = \tilde{p}_0$ und $S > 0$ im Intervall $\Delta_0(\tilde{p}_0, p_0)$. Weil die Nullstellen von G_n zufolge unserer Hypothese H einfach sind, muss $S < 0$ gelten im Intervall (p_0, p_0') , wo p_0' die nächste Nullstelle von G_n bezeichnet.

Nun ist aber die Zeichenfolge der Grössen

$$(6,5) \quad p, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$$

in einem Nullpunkt von G_n gleich der Zeichenfolge in dem zugehörigen Radikal. Hieraus folgt, nach Nr. 5, der

Hilfssatz. Beim Übergang einer Nullstelle von G_n geht das Vorzeichen des Produktes

$$(6,6) \quad - p p_1 p_2 \dots p_{n-1}$$

stets bei wachsendem p von + in - über.

Weil nach dem Übergang der grössten Nullstelle das Produkt (6,6) sein - Zeichen behält und weil für alle reellen Nullstellen $p < 2$ ist, gilt der

aten Fällen
geschaltet.
h im Falle

Gesamtheit
enfolge (4,2)
ler kleinsten
von n be-
genden, wie

+ - - -),

-).

mengestellt.

Satz 2. Die Anzahl der reellen Nullstellen des Polynoms $G_n(p)$ ist gleich der Anzahl der negativen Zyklen von y_n für $p = 2$, d.h. Zyklen mit einem negativen Multiplikator.

Unser Problem wird dadurch auf die Bestimmung der Zyklen von y_n für den Wert $p = 2$ zurückgeführt. Nach [4] bilden die Fixpunkte von y_n für $p = 2$ zwei Gruppen

$$I: \quad 2 \cos \frac{2 \pi m}{2^n - 1}, \quad (m = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1)$$

$$II: \quad 2 \cos \frac{2 \pi m'}{2^n + 1}, \quad (m' = 1, 2, \dots, 2^{n-1}).$$

Ist

$$\cos 2^v \alpha_m, \quad (v = 1, 2, \dots, n - 1)$$

ein Zyklus der ersten Gruppe, so ist sein Multiplikator

$$S = 2^n \prod_{v=0}^{n-1} \cos 2^v \alpha_m = 2^n \sin \frac{2 \pi m}{2^n - 1} > 0.$$

Für die Zyklen der zweiten Gruppe gilt dagegen

$$S = - 2^n \sin \frac{2 \pi m'}{2^n + 1} < 0.$$

Indem wir nur die primitiven Nullstellen von G_n berücksichtigen, können wir aus dem Obigen den folgenden Satz ableiten.

Satz 3. Die Anzahl der primitiven Nullstellen des Polynoms G_n ist gleich der Anzahl der primitiven Zyklen in der Gruppe II.

Für diese Anzahl gilt der Ausdruck

$$(6,7) \quad \varphi(n) = \frac{2^{n-1} - \varepsilon_n}{n}.$$

Hier ist $\varepsilon_n = 0$ für $n = 2^m$ und $\varepsilon_n = 1$ für eine ungerade Primzahl n . Allgemein ist

$$(6,8) \quad \varepsilon_n = n \sum_v \frac{\varphi\left(\frac{n}{k_v}\right)}{k_v},$$

wo k_v die Gesamtheit der ungeraden Teiler von n zu durchlaufen hat.

Für die kleinsten Werte von n bekommt man den zugehörigen Wert von ε_n und $\varphi(n)$ aus der folgenden Tafel

n
ε_n
$\varphi(n)$

Die Wurzt
tiven Nu
Abhandl

7. Na
eine une
behaupte
solcher F
man um
sogar un
was dem
Es sei

(7,1)

Wir bilde

(7,2)

wo das]
Zeichen
Nr. 4 gel

(7,3)

einen Nu
ten α_n ,

Aus c
ausgehen

(7,4)

von Nullj

bilden ka
punkte de

annehmer

Wir wisse

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ϵ_n	0	1	0	1	2	1	0	4	2	1	8	1	2	19	0
$\varphi(n)$	1	1	2	3	5	9	16	28	51	93	170	315	585	1091	2048

Die Wurzel­ausdrücke und die approximativen Zahlenwerte der reellen primitiven Nullstellen der 10 ersten Polynome G_n sind am Schlusse dieser Abhandlung gegeben.

4. Gegenseitige Lage der Nullpunkte der G -Polynome.

7. Nach dem Obigen bilden die reellen Nullpunkte $\neq 0$ der G -Polynome eine unendliche, im Intervall $1 \leq p < 2$ liegende Punktmenge. Wir behaupten, dass die genannten Punkte isoliert liegen. Wäre nämlich ein solcher Punkt p_0 eine Häufungsstelle für andere Nullpunkte, so könnte man um p_0 herum ein Intervall bilden, für dessen p -Werte mehrere, ja sogar unendlich viele verschiedene attraktive Zyklen vorhanden wären, was dem Fatouschen Satz widerspricht.

Es sei nun α_n ein Nullpunkt von G_n mit der Entwicklung

$$(7,1) \quad p = r_n(p).$$

Wir bilden den Ausdruck

$$(7,2) \quad r_{n+1} = r_n(\pm -) r_n,$$

wo das Doppelzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem ob die Anzahl der $-$ Zeichen in r_n gerade oder ungerade ist. Aus den Entwicklungen von Nr. 4 geht hervor, dass

$$(7,3) \quad p = r_{n+1}(p)$$

einen Nullpunkt $\alpha_{2n} > \alpha_n$ von G_{2n} darstellt und dass zwischen den Punkten α_n, α_{2n} kein Nullpunkt eines G -Polynoms existiert.

Aus dem Obigen folgt, dass man von einem Nullpunkt α_n von G_n ausgehend eine monoton wachsende Folge

$$(7,4) \quad \alpha_n < \alpha_{2n} < \alpha_{4n} < \dots$$

von Nullpunkten der Polynome

$$G_{2^m n} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

bilden kann, so dass zwischen zwei Punkten von (7,4) keine anderen Nullpunkte der G -Polynome existieren. Wir können offenbar ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge (7,4) nicht rückwärts fortgesetzt werden kann. Wir wissen ferner nach dem Obigen, dass für (7,4) der Grenzwert

$$(7,5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{2^m n} = \alpha^*$$

existiert, der jedenfalls < 2 ist.

Wir bilden jetzt den Ausdruck

$$(7,6) \quad r_{n+1}(p) = \sqrt{p - r_n(p)},$$

welcher für $p \geq \alpha_n$ reell ist und für $p = \alpha_n$ verschwindet. Der durch (7,6) definierte Punkt gehört zur Menge μ der aus $y = 0$ durch Iteration der zu der inversen Operation $\sqrt{y + p}$ erhaltenen Bildpunkte. Wir behaupten nun, dass das Intervall

$$\delta: \quad 0 < y < r_{n+1}(p)$$

keinen Punkt der Menge μ enthält.

Wir nehmen zum Beweis indirekt an, es sei $r(p)$ ein Punkt von μ , der für einen Wert p des Intervalles δ zu μ gehört, also

$$0 < r(p) < r_{n+1}(p).$$

Weil α_n eine primitive Nullstelle von G_n ist, gilt $r(\alpha_n) > 0$. Es sind jetzt a priori zwei Fälle möglich: 1. Für einen Wert p_0 von δ ist $r(p) = r_{n+1}(p)$. 2. Beim Übergang über einen Wert p_0 von δ wird $r(p)$ imaginär und also $r(p_0) = 0$. In den beiden Fällen wird aber offenbar ein Teilradikal von $r(p)$ gleich null, und dort hätte ein Polynom $G(p)$ einen Nullpunkt, was dem Obigen widerspricht. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Gleiches gilt offenbar für jedes Intervall $\Delta_m = (\alpha_{2^m n}, \alpha_{2^{m+1} n})$.

5. Existenz von attraktiven Zyklen

8. Wir sind jetzt in der Lage, eine allgemeine Methode zur Konstruktion von attraktiven Zyklen zu geben.

Aus den Entwicklungen der Nr. 6 wissen wir schon, dass um jeden Punkt $\alpha_{2^m n}$ ein p -Intervall konstruiert werden kann, für dessen Werte ein attraktiver Zyklus der Ordnung $2^m n$ existiert, der für $p < \alpha_{2^m n}$ positiv und für $p > \alpha_{2^m n}$ negativ ist und für $p = \alpha_{2^m n}$ in einen Nullzyklus übergeht. Speziell für den ersten Punkt gilt dabei folgendes: es gibt ein Intervall

$$\alpha_0 < p < \alpha_n,$$

für dessen p -Werte ein positiver attraktiver Zyklus der Ordnung n existiert, der für $p = \alpha_0$ indifferent wird. Die Punkte

$$(8,1) \quad \alpha_0 < p < \alpha^*$$

definiere
nennen
Satz her
Satz
attraktiv

Δ_m :

gleich 2
Wir

(8,2)

für jede
kein Pu
schlicht

(8,3)

ausdrüc
 δ_m posit
enthält,

und spe

Nun erg

(8,4)

also

wobei

Hieraus

(8,5)

Es exis

definieren dann ein Intervall σ_n von p -Werten, das wir ein *Spektrum* nennen werden. Die Bedeutung des Spektrums geht nun aus dem folgenden Satz hervor,

Satz 4. Für jeden zum Spektrum σ_n gehörigen p -Wert gibt es einen attraktiven Zyklus, dessen Ordnung in einem Teilintervall

$$A_m : \quad (\alpha_{2^m n}, \alpha_{2^{m+1} n})$$

gleich $2^m n$ oder $2^{m+1} n$ ist.

Wir bemerken zum Beweis am Anfang, dass der Wert der Ableitung

$$(8,2) \quad y'_m = 2^m y_1 \dots y_{m-1}$$

für jede Iterierte y_m auf $\delta = \delta(0, r)$ von null verschieden ist, weil dort kein Punkt von μ liegt. Vermittels y_m wird also das Intervall $\delta(0, r)$ schlicht auf ein Intervall $\delta_m(p_{m-1}, r_m)$ abgebildet, das wir kurz durch

$$(8,3) \quad y(0, r) \rightarrow y_m(p_{m-1}, r_m)^\pm$$

ausdrücken, wo das Zeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem ob das Intervall δ_m positiv oder negativ gerichtet ist. Weil ferner δ_m den Nullpunkt nicht enthält, ist allgemein

$$\text{sign } p_{m-1} = \text{sign } r_m$$

und speziell

$$\text{sign } p_{v+n} = \text{sign } p_v.$$

Nun ergibt sich aus (8,3) alternierend

$$(8,4) \quad y(0, r) \rightarrow y_{n+1}(p_n, p)^- \rightarrow y_{2n+1}(p_{2n}, p_n)^+ \rightarrow \dots,$$

also

$$-p < p_{2n} < p_{4n} < \dots,$$

$$0 > p_n > p_{3n} > p_{5n} > \dots,$$

wobei

$$p_{(2k+1)n} > p_{2kn}.$$

Hieraus folgt ferner

$$(8,5) \quad \begin{aligned} y(-p, p_{2n})^+ &\rightarrow y_{2n}(p_{2n}, p_{4n})^+ \rightarrow y_{4n}(p_{4n}, p_{6n})^+ \rightarrow \dots \\ y(p_n, p_{3n})^- &\rightarrow y_{2n}(p_{3n}, p_{5n})^- \rightarrow y_{4n}(p_{5n}, p_{7n})^- \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Es existieren somit die Grenzwerte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k}(p_{2k}, p_{2k+2}) = \lambda$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k+1}(p_{2k+1}, p_{2k+3}) = \lambda',$$

durch (7,6)
ation der
behaupten

kt von μ ,

s sind jetzt
= $r_{n+1}(p)$.
är und also
adikal von
punkt, was
n.
n).

onstruktion

eden Punkt
Werte ein
 $2^m n$ positiv
Nullzyklus
es gibt ein

n existiert,

wo $\lambda \leq \lambda'$. Diese Grenzwerte geben offenbar Fixpunkte für einen attraktiven (im speziellen Falle indifferenten) Zyklus, dessen Ordnung gleich $2n$ im Falle $\lambda < \lambda'$ und gleich n im Falle $\lambda = \lambda'$ ist. Weil gleiches für jedes Intervall Δ_m gilt, ist unser Satz 4 damit endgültig bewiesen.

Wir bemerken noch, dass die Ordnung des zum Intervall Δ_m gehörigen Zyklus in der Nähe des Wertes $p = \alpha_{2^m n}$ gleich $2^m n$ und in der Nähe des Wertes $p = \alpha_{2^{m+1} n}$ gleich $2^{m+1} n$ ist und dass der Übergang für Werte von p stattfindet, wo ein indifferenter Zyklus mit dem Multiplikator $S = -1$ vorliegt.

Als Beispiel wählen wir das seiner Lage nach extreme Spektrum σ_0 mit dem Anfangspunkt $p = 1/4$. Die zugehörigen Punkte (7,4) sind jetzt die kleinsten Nullpunkte der Polynome

$$G_{2^m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

und sie sind Wurzeln der Gleichungen

$$p = r_m$$

wo die Radikale r_m aus der Rekursionsformel

$$r_{m+1} = r_m (\pm -) r_m$$

berechnet werden können. Hier gilt das + Zeichen für ungerades m und - Zeichen für gerades m . Die ersten unter den Grössen α_m haben die folgenden approximativen Werte ($\alpha_1 = 1$)

$$\alpha_2 = (+ -) = 1,3107026413$$

$$\alpha_3 = (+ - - - + -) = 1,3815474844.$$

Für den Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = p_0^*$, den Endpunkt des Spektrums σ_0 , habe ich vermittels einer Elektronenmaschine den approximativen Wert

$$p_0^* = 1,401155189$$

berechnet.

6. Singuläre p -Werte

9. Wir nennen einen p -Wert p^* singulär, wenn der Punkt $p = p^*$ eine Häufungsstelle der Nullstellen der G -Polynome ist. Nach dem Obigen gehören zur Menge (p^*) der singulären p -Werte u.a. die Endpunkte der Spektren. Eine andere allgemeine Methode zur Bildung singulärer p -Werte findet man in unserer Arbeit [5]. Wegen der Definition ist (p^*) eine unendliche abgeschlossene Menge, welche $p = p_0^*$ als kleinstes und $p = 2$ als grösstes Element enthält. Eine bemerkenswerte Art von singulären Werten ergibt sich aus dem folgenden

Satz

Anfangs

Es se

α_n^0 und

gelten d

(9,1)

wobei de

den Zyk

Übergan

attrakti

p_r den

stellen c

unser Sa

10. U

das zu

jetzt die

(10,1)

welche l

geben. l

nannten

Der Gre

(10,2)

genügt c

Wir

r_m und

dem Gr

$x = \omega^*$

also der

woraus

Widersp

Satz 5. Der Anfangspunkt jedes Spektrums ist ebenfalls singular, vom Anfangspunkt $p = 1/4$ des ersten Spektrums σ_0 abgesehen.

Es sei nämlich σ_n ein Spektrum der Ordnung n mit dem Anfangspunkt α_n^0 und der ersten Nullstelle α_n . Für die p -Werte des Intervalles (α_n^0, α_n) gelten dann die Beziehungen

$$(9,1) \quad y(-p, p_n)^+ \rightarrow y_n(p_n, p_{2n})^+ \rightarrow y_{2n}(p_{2n}, p_{3n})^+ \rightarrow \dots,$$

wobei der Grenzwert $\lim_{v \rightarrow \infty} p_{v_n}$ einen attraktiven Fixpunkt des entsprechenden Zyklus Σ_n gibt. Die Relationen (9,1) können aber nicht mehr beim Übergang des Wertes α_n^0 gelten, weil der Zyklus Σ_n jetzt nicht mehr attraktiv ist. Hieraus folgt, wie leicht einzusehen, dass gewisse Punkte p_v den Nullpunkt überschreiten müssen. Weil solche Punkte, also Nullstellen der G -Polynome, in jeder Umgebung des Wertes α_n^0 existieren, ist unser Satz damit bewiesen.

10. Um das Obige näher an einem Beispiel zu erläutern, betrachten wir das zu G_3 gehörige Spektrum mit dem Anfangspunkt $p = 7/4$. Wir bilden jetzt die unendliche Folge der Radikalgleichungen

$$(10,1) \quad p = (+ - -)^m = r_m, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

welche Nullstellen der Polynome

$$G_{2+3m}$$

geben. Man bestätigt nach der in Nr. 5 angegebenen Methode, dass die genannten Nullstellen ω_m eine monoton wachsende Folge bilden:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$$

Der Grenzwert

$$(10,2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \omega_v = \omega^*$$

genügt dann, wegen des Fatouschen Satzes, der Bedingung $\omega^* \leq 7/4$.

Wir behaupten nun, dass $\omega^* = 7/4$. Andernfalls wären alle Radikale r_m und Grössen ω_m reell für einen Wert $p < 7/4$, und dies wäre auch mit dem Grenzwert ω^* der Fall. Das ist aber unmöglich. Denn offenbar genügt $x = \omega^*$ der Gleichung

$$x = \sqrt{p + \sqrt{p - \sqrt{p - x}}},$$

also der Gleichung

$$[(x^2 - p)^2 - p]^2 - p = -x,$$

woraus folgen würde, dass $-x$ ein reeller Fixpunkt von y_3 wäre, was ein Widerspruch ist [4].

Nach dem Obigen hat der Anfangspunkt jedes von σ_0 verschiedenen Spektrums die Eigenschaft, einseitig singular zu sein, wobei für den Anfangswert ein indifferenten Zyklus mit dem Multiplikator $S = +1$ existiert. Jeder solcher Punkt ist gleichzeitig Häufungspunkt für Spektren.

Was die Endpunkte der Spektren betrifft, ist es wahrscheinlich, dass sie beiderseits singular sind. Ohne unsere Vermutung beweisen zu können, wollen wir zu ihrer Begründung folgendes bemerken.

Wir betrachten den Endpunkt p_0^* des ersten Spektrums, der nach Nr. 8 von links eine Häufungsstelle der kleinsten Nullstellen der Polynome G_{2^n} ist. Es sei p_1^* die untere Grenze der rechts von p_0^* liegenden Nullstellen der G -Polynome, wobei wegen des Fatouschen Satzes $p_1^* \geq p_0^*$ gilt. Unsere Hypothese ist hier äquivalent mit der Gleichung

$$p_1^* = p_0^* .$$

Zur praktischen Verifizierung dieser Gleichung haben wir vermittels einer Elektronenmaschine die kleinsten reellen Nullstellen aller G -Polynome G_m bis zum Wert $m = 2^9$ berechnet und dabei bestätigt, dass

$$p_1^* < 1,40117 ,$$

wo rechts eine Grösse vorkommt, die sich von p_0^* um weniger als $2 \cdot 10^{-5}$ unterscheidet. Gleichzeitig erhält man hieraus für den Wert von p_0^* die Schranken

$$1,40115 < p_0^* = 1,40117 .$$

Weil ähnliches für alle Spektren gilt, folgt aus unserer Hypothese der **Satz 5.** Die Summe der Spektren überdeckt das Intervall

$$1/4 \leq p \leq 2$$

bis auf eine unendliche diskontinuierliche Punktmenge (p^*), die Menge der singulären Werte des Parameters p .

Für jeden zu (p^*) nicht gehörigen Wert von p existiert stets ein attraktiver Zyklus, dessen Ordnung bei unbegrenzter Annäherung an einen Punkt von (p^*), wenigstens von einer Seite, über alle Grenzen wächst.

Nachtrag

Wenn man die Hypothese H nicht annehmen will, hat man in den Sätzen 2—4 folgende Modifikationen zu machen.

Sätze 2 und 3. Die Anzahl der primitiven Nullstellen des Polynoms G_n ist *wenigstens* gleich $\varphi(n)$.

Satz 4. Gilt mit dem Zusatz, dass für gewisse Teilintervalle der Spektren attraktive Zyklen vorkommen können, die aus Nullzyklen nicht durch stetige Variation des Parameters abgeleitet werden können.

Tafel fü

$G_3 = 0 :$
1,754877666

$G_4 = 0 :$
1,310702641
1,940799806

$G_5 = 0 :$
1,625413725
1,860782522
1,985424253

$G_6 = 0 :$
1,476014642
1,754877666
1,772892903
1,907280091
1,966773216
1,996376137

$G_7 = 0 :$
1,574889139
1,674066091
1,832315202
1,884803571
1,927147709
1,953705894
1,977179587
1,991814172
1,999095682

$G_8 = 0 :$
1,310702641
1,381547484
1,521817231
1,711079470
1,810001385
1,851730049
1,870003880
1,896917994
1,917098277
1,940799806
1,941782090
1,960758987
1,972199838
1,981655786
1,988793274
1,994332966

Tafel für die approximativen Werte der reellen Nullstellen der G -Polynome

chiedenen
Anfangs-
existiert.

h, dass sie
1 können,

der nach
Polynome
iden-Null-
 $p_i^* \geq p_0^*$

ttels einer
Polynome

eniger als
Wert von

othese der

die Menge

ein attrak-
nen Punkt
t.

n den Sät-

lynomis G_n

er Spektren
icht durch

$G_3 = 0:$

1,7548776662 = (+)

$G_4 = 0:$

1,3107026413 = (+ -)

1,9407998065 = (+ +)

$G_5 = 0:$

1,6254137251 = (+ - -)

1,8607825222 = (+ + -)

1,9854242531 = (+ + +)

$G_6 = 0:$

1,4760146427 = (+ - - -)

1,7548776662 = (+ - - +) = (+)

1,7728929034 = (+ + - +)

1,9072800911 = (+ + - -)

1,9667732164 = (+ + + -)

1,9963761377 = (+ + + +)

$G_7 = 0:$

1,5748891398 = (+ - - - -)

1,6740660915 = (+ - - + -)

1,8323152028 = (+ + - + -)

1,8848035716 = (+ + - - -)

1,9271477094 = (+ + - - +)

1,9537058943 = (+ + + - +)

1,9771795870 = (+ + + - -)

1,9918141725 = (+ + + + -)

1,9990956823 = (+ + + + +)

$G_8 = 0:$

1,3107026413 = (+ - + - + -) = (+ -)

1,3815474844 = (+ - - - + -)

1,5218172317 = (+ - - - - -)

1,7110794700 = (+ - - + - -)

1,8100013858 = (+ + - + - -)

1,8517300494 = (+ + - + - +)

1,8700038808 = (+ + - - - +)

1,8969179947 = (+ + - - - -)

1,9170982771 = (+ + - - + -)

1,9407998065 = (+ + - - + +) = (+ +)

1,9417820903 = (+ + + - + +)

1,9607589872 = (+ + + - + -)

1,9721998384 = (+ + + - - -)

1,9816557863 = (+ + + - - +)

1,9887932743 = (+ + + + - +)

1,9943329667 = (+ + + + - -)

$G_8 = 0:$

1,9979629156 = (+ + + + + -)

1,9997740487 = (+ + + + + +)

$G_9 = 0:$

1,5552827008 = (+ - - - - -)

1,5956809634 = (+ - - - - +)

1,6561325626 = (+ - - + - -)

1,6901422631 = (+ - - + - -)

1,7548776662 = (+ - - + - -) = (+)

1,7858656464 = (+ + - + - -)

1,8227563225 = (+ + - + - -)

1,8412885615 = (+ + - + - -)

1,8783826015 = (+ + - - - +)

1,8907754244 = (+ + - - - -)

1,9031167730 = (+ + - - - -)

1,9114446315 = (+ + - - + -)

1,9222857782 = (+ + - - + -)

1,9322439666 = (+ + - - + -)

1,9495749032 = (+ + + - + -)

1,9573250505 = (+ + + - + -)

1,9640243368 = (+ + + - + -)

1,9694191205 = (+ + + - - +)

1,9747808589 = (+ + + - - -)

1,9794575049 = (+ + + - - -)

1,9838102500 = (+ + + - - +)

1,9870043475 = (+ + + + - +)

1,9903763811 = (+ + + + - -)

1,9931302549 = (+ + + + - -)

1,9954190327 = (+ + + + - +)

1,9972230247 = (+ + + + + -)

1,9985865888 = (+ + + + + -)

1,9994914380 = (+ + + + + +)

1,9999435218 = (+ + + + + +)

$G_{10} = 0:$

1,4470088406 = (+ - - - + - + -)

1,5017168394 = (+ - - - - - + -)

1,5362432713 = (+ - - - - - - -)

1,6254137251 = (+ - - - - + - -) = (+ - -)

1,6294325004 = (+ - - + - + - -)

1,7017008912 = (+ - - + - - - -)

1,7219150996 = (+ - - + - - + -)

1,8024361348 = (+ + - + - - + -)

1,8162948552 = (+ + - + - - - -)

1,8295096240 = (+ + - + - - - +)

1,8351588453 = (+ + - + - + - +)

1,8466272112 = (+ + - + - + - -)

1,8607825222 = (+ + - + - + + -) = (+ + -)

$G_{10} = 0 :$

1,8615584138 = (+ + - - - + + -)
 1,8743146838 = (+ + - - - + - -)
 1,8824079338 = (+ + - - - + - +)
 1,8871722064 = (+ + - - - - - +)
 1,8940020229 = (+ + - - - - + +)
 1,8998323378 = (+ + - - + - + +)
 1,9144798637 = (+ + - - + - + -)
 1,9196354893 = (+ + - - + - - -)
 1,9250342385 = (+ + - - + - - +)
 1,9293203309 = (+ + - - + + - +)
 1,9353907348 = (+ + - - + + - -)
 1,9468734542 = (+ + + - + + - -)
 1,9518999969 = (+ + + - + + - +)
 1,9554233270 = (+ + + - + - - +)
 1,9590980466 = (+ + + - + - - -)
 1,9623786897 = (+ + + - + - + -)
 1,9658217855 = (+ + + - + - + +)
 1,9677427763 = (+ + + - - - + +)
 1,9708578891 = (+ + + - - - + -)
 1,9734974173 = (+ + + - - - - -)
 1,9760421686 = (+ + + - - - - +)

 $G_{10} = 0 :$

1,9782933545 = (+ + + - - + - +)
 1,9805771734 = (+ + + - - + - -)
 1,9827194083 = (+ + + - - + + -)
 1,9854242531 = (+ + + - - + + +) = (+ + +)
 1,9854823210 = (+ + + + - + + +)
 1,9879405743 = (+ + + + - + + -)
 1,9896005869 = (+ + + + - + - -)
 1,9911208761 = (+ + + + - + - +)
 1,9924793822 = (+ + + + - - - +)
 1,9937478642 = (+ + + + - - - -)
 1,9948891994 = (+ + + + - - + -)
 1,9959241519 = (+ + + + - - + +)
 1,9968045527 = (+ + + + + - + +)
 1,9976080939 = (+ + + + + - + -)
 1,9982889074 = (+ + + + + - - -)
 1,9988557660 = (+ + + + + - - +)
 1,9993075043 = (+ + + + + + - +)
 1,9996469177 = (+ + + + + + - -)
 1,9998729118 = (+ + + + + + + -)
 1,9999858811 = (+ + + + + + + +)

Verzeichnis der früheren Arbeiten des Verfassers über die Iteration

- [1] Sur une généralisation de la moyenne arithmétique-géométrique de Gauss (C. R. Acad. Sc., t. 246, 1958).
- [2] Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels (Ann. Acad. Sc. Fennicae, A. I, no. 253, 1958).
- [3] Iteration der reellen Polynome zweiten Grades (Ibid. no. 256, 1958).
- [4] Iteration von Quadratwurzeloperationen (Ibid, no. 259, 1958).
- [5] Iteration der reellen Polynome zweiten Grades. II. (Ibid. no. 268, 1959).
- [6] Funktioista, jotka toteuttavat toisen asteen kertosaännön. (Über Funktionen, die ein quadratisches Multiplikationstheorem besitzen) (Arkhimedes no. 1, 1960).
- [7] Inversion der Iteration für rationale Funktionen (Ann. Acad. Sc. Fennicae, A. I., no. 292, 1960).
- [8] Funktioista, jotka toteuttavat toisen asteen kertosaännön (Arkhimedes no. 1, 1962)
- [9] Sur l'itération des polynomes réels quadratiques (Journal de Math. 1962).