Zeitschriftendaten

Titel: [Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia / A / 1] Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia
Scientiarum Fennicae
Mathematica

Standort: S | Signatur: 3Z 3570 | Fachgruppe: -
Volume: 268 | Jahr: 1959 | Heft: 1

Artikeldaten

Titel: Iteration der reellen polynomen zweiten Grades, II

Autor: Myrberg
Seiten: 18-

Langtitel

PPN: 032853742
Zeitschrift: [Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia / A / 1] Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia
Paralleltitel: Annales Academiae Scientiarum Fennicae
Unterreihe: Sarja A = Series A. 1, Mathematica
Körperschaft: Suomalainen Tiedeakatemia <Helsinki> *1908 -*
Erschienen: Helsinki, 1941-1961
Ersch.-verlauf: 1.1941 - 305.1961
Anmerkung: Sachl. Benennung der 2. OG bis 234.1956: Mathematica, physica
Überwiegend in dt. und engl. Sprache

Bibliogr. Zusammenhang: Forts.: Annales Academiae Scientiarum Fennicae / A / 1 / Suomalainen Tiedeakatemia <Helsinki>
Daraus hervorgeg.: Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia / A / 6 / Suomalainen Tiedeakatemia <Helsinki>

ZDB-ID: 1116229-6

ZDB-Notation: 770 ; 790

SUOMALAISEN TIEDEAKATEMIAN TOIMITUKSIA
ANNALES ACADEMIÆ SCIENTIARUM FENNICÆ

SARJA
SERIES A

I. MATHEMATICA

268

ITERATION DER REELLEN POLYNOME ZWEITEN GRADES II

VON

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1959
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Vorgelegt am 9. Oktober 1959.

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1959

1. Vorwort.

1. Wir haben in unseren früheren Arbeiten [3,4] das Problem der Iteration des Polynomes zweiten Grades

$$y_1 = y^2 + p \,, \tag{1,1}$$

wo p ein reeller Parameter ist, im komplexen Gebiet behandelt. Es handelt sich dabei in erster Linie um die Bestimmung des zum unendlich fernen Punkt gehörigen Attraktionsgebiets, welches aus der Gesamtheit der Punkte der komplexen y-Ebene besteht, deren durch die Iteration von (1,1) erhaltene Bildpunkte

$$y_1 \,, y_2 \,, y_3 \,, \ldots \tag{1,2}$$

gegen den unendlich fernen Punkt konvergieren.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, das Problem der Iteration für die reellen Werte der Variablen eingehender zu behandeln. Eine wichtige Aufgabe hat man in der Bestimmung der zu (1,1) gehörigen attraktiven Zyklen, deren Punkte attraktive Fixpunkte für die aus (1,1) durch Iteration erhaltenen Abbildungen sind. Nach einem allgemeinen Satz von Fatou [1, S. 141] ist ihre Anzahl höchstens Eins. Eine entscheidende Rolle spielen hier die Nullstellen gewisser Polynome $G_n(p)$ von p, die durch die Rekursionsformel

$$G_{n+1}(p) = G_n^2(p) + p \quad , \qquad G_0(p) = 0 \tag{1,3}$$

bestimmt sind. In der vorliegenden Arbeit, die den Charakter einer vorläufigen Mitteilung hat, werden nur die Hauptzüge der Theorie eingehend behandelt. Gleichzeitig wird es möglich, unsere früheren Ergebnisse im komplexen Gebiet zu ergänzen.

2. Definitionen.

2. Durch n-fache Iteration wird aus (1,1) ein Polynom vom Grade 2^n

$$y_n = P_n(y) \tag{2,1}$$

erhalten, welches der Rekursionsformel

$$P_{n+1}(y) = P_n^2(y) + p \tag{2,2}$$

genügt. Die ersten unter den Polynomen (2,1) sind

$$P_1 = y^2 + p \,, P_2 = (y^2 + p)^2 + p \,, P_3 = [(y^2 + p)^2 + p]^2 + p \,.$$

Die Koeffizienten von (2,1) sind Polynome von p mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten. Ein besonderes Interesse hat das letzte Glied

$$P_n(0) = G_n(p)\,. \tag{2,3}$$

welches ein Polynom von p vom Grade 2^{n-1} ist. Die ersten unter den Polynomen (2,3), die der Rekursionsformel (1,3) genügen, sind die folgenden:

$$G_1 = p\,,\ G_2 = p^2 + p\,,\ G_3 = (p^2 + p)^2 + p\,. \tag{2,4}$$

Indem wir die Relation (1,1) als eine Abbildung der reellen y-Achse auffassen, welche einem Punkt y eindeutig einen Punkt y_1 zuordnet, fragen wir nach den Fixpunkten der Abbildung, also den Wurzeln der Gleichung

$$y^2 + p = y\,. \tag{2,5}$$

Sie sind reell für $p \leq \frac{1}{4}$ und haben den Ausdruck

$$q_\nu = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - p} \qquad (\nu = 1\,,\,2)\,. \tag{2,6}$$

Betrachten wir nachher die durch die zweite Iterierte

$$y_2 = (y^2 + p)^2 + p \tag{2,7}$$

vermittelte Abbildung. Sie hat als Fixpunkte neben (2,6) die zwei neuen Punkte

$$\bar{q}_\nu = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4} - p}\,, \qquad (\nu = 1\,,\,2) \tag{2,8}$$

welche durch Nullsetzen des Polynomes

$$(y_2 - y) : (y_1 - y) = y^2 + y + p + 1 \tag{2,9}$$

erhalten werden. Die neuen Fixpunkte sind reell für $p \leq -\frac{3}{4}$. Bei der Abbildung (1,1) werden sie mit einander permutiert.

3. Allgemein gilt folgendes.

Es sei y_0 ein Fixpunkt der Abbildung (2,1). Dann sind gleichzeitig alle aus y_0 durch die Iteration von (1,1) erhaltenen Punkte (1,2) ebenfalls Fixpunkte von (2,1). Es ist nämlich

$$P_n(y_k) = P_n(P_k(y_0)) = P_k(P_n(y_0)) = P_k(y_0) = y_k\,.$$

Jedenfalls ist hier $y_n = y_0$ und allgemein $y_{m+n} = y_m$. Es sind jetzt zwei Fälle möglich. Entweder sind die n ersten Punkte

$$y_0\,,\,y_1\,,\,\ldots\,,\,y_{n-1} \tag{3,1}$$

voneinander verschieden und sie werden dann durch (1,1) miteinander zyklisch vertauscht. In diesem Fall soll der Fixpunkt y_0 und der zugehörige Zyklus (3,1) primitiv heissen. Oder die Periode ν von (1,2) ist kleiner als n

und dann offenbar ein Teiler von n. Der zugehörige Fixpunkt ist dann Fixpunkt schon für die Abbildung

$$y_{\mu} = P_{\mu}(y) \qquad n = \mu\nu$$

und soll mit dem zugehörigen Zyklus imprimitiv heissen. Wenn insbesondere n eine Primzahl ist, sind alle Zyklen primitiv, von den beiden trivialen Zyklen abgesehen, die aus dem einzigen Punkt q_1 bzw. q_2, dem Fixpunkt von (1,1), bestehen.

Offenbar kann man sich stets auf die primitiven Zyklen einschränken. Die zu ihrer Bestimmung geltende Gleichung

$$P_n(y) = y \tag{3,2}$$

ist eine abelsche Gleichung, deren Lösung in bekannter Weise auf die Lösung einer Resolvente und einer Anzahl einfacher abelscher Gleichungen zurückgeführt wird.

Das Verhalten der durch (2,1) vermittelten Abbildung in der Umgebung eines Fixpunktes y_0 ist wesentlich von dem Wert der Ableitung

$$y'_{n} = 2^n y_0 y_1 \ldots y_{n-1} = S_0\,, \tag{3,3}$$

des zum Punkt y_0 gehörigen Multiplikators S_0, abhängig. Offenbar hat S_0 einen und denselben Wert für jeden Punkt des Zyklus. Wir nennen demnach einen Zyklus attraktiv, repulsiv oder indifferent, je nachdem ob

$$|S_0| < 1\,, > 1 \text{ oder } = 1$$

ist. Es ist also jeder Fixpunkt eines attraktiven Zyklus Z_n n:ter Ordnung ein attraktiver Fixpunkt für die zugeordnete Abbildung (2,1) und Entsprechendes gilt für die repulsiven und indifferenten Zyklen.

Wir nennen ferner einen Zyklus Z_n positiv oder negativ nach dem Vorzeichen des zugehörigen Multiplikators. Eine spezielle Bedeutung haben die Nullzyklen, d.h. diejenigen, deren Multiplikator gleich Null ist. Dies ist nach dem Obigen der Fall, wenn einer der Punkte (3,1) des Zyklus gleich Null ist, also für diejenigen Werte von p, die der Gleichung

$$G_n(p) = 0 \tag{3,4}$$

genügen. Eine genauere Untersuchung der Nullstellen der Polynome (2,3) wird im 4. Kapitel ausgeführt.

3. Die Lage der Fixpunkte.

4. Betreffs der Lage der reellen Fixpunkte der Abbildungen (2,1) wollen wir zum Anfang folgenden Satz beweisen.

Satz 1. *Für* $p > \frac{1}{4}$ *sind die Fixpunkte jeder Abbildung* (2,1) *imaginär, für* $p \leqq -2$ *sind die Fixpunkte jeder Abbildung reell. Für* $-2 < p \leqq \frac{1}{4}$ *können sowohl reelle als imaginäre Fixpunkte vorkommen.*

Es sei zuerst $p > \frac{1}{4}$. Dann hat (1,1) keine reellen Fixpunkte. Aus (1,1) folgt jetzt

$$y_1 - y = (y - \tfrac{1}{2})^2 + (p - \tfrac{1}{4}) > 0$$

und hieraus, für jeden reellen Wert von y, $y_1 > y$ und allgemein $y_{n+1} > y_n$. Der Grenzwert der unendlichen monotonen Folge (1,2), der einen Fixpunkt von (1,1) darstellt, kann aber nur unendlich sein:

(4,1)
$$\lim_{n \to \infty} y_n = \infty .$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass auch die iterierten Abbildungen (2,1) keinen reellen Fixpunkt haben können.

Es sei zweitens $p \leqq -2$. Wir haben in einer früheren Arbeit [3] gezeigt, dass in diesem Falle der Grenzwert (4,1) für jeden imaginären Wert von y erhalten wird. Dann können aber die Abbildungen (2,1) nur reelle Fixpunkte haben.

Es bleibt also noch der Fall

(4,2)
$$-2 < p \leqq \tfrac{1}{4}$$

übrig, welcher im Folgenden einer eingehenden Untersuchung unterworfen wird.

Betreffs der Lage der reellen Fixpunkte der Abbildungen im Falle (4,2) gilt der folgende

Satz 2. *Sämtliche reellen Fixpunkte der Abbildungen (2,1) liegen im Falle (4,2) auf dem Intervall*

(4,3)
$$-q_1 < y \leqq q_1$$

und im Falle $p \leqq 0$ *sogar, von* q_1 *abgesehen, im Intervall*

(4,4)
$$p \leqq y \leqq p_1 = p^2 + p .$$

Unser Beweis gründet sich auf den folgenden

Hilfssatz. *Es gilt (4,1) für* $|y| > q_1$. *Ferner gilt*

$$|y_n| < q_1 \text{ für } |y| < q_1 .$$

Offenbar ist für $|y| > q_1$

$$y_1 = y^2 + p > q_1^2 + p = q_1 .$$

Wegen

(4,5)
$$y_1 - y = (y - q_1)(y - q_2)$$

ist ferner $y_1 > y$ für $y > q_1$ und allgemein $y_{n+1} > y_n$. Wie oben folgert man daraus, dass (4,1) für $|y| > q_1$ gilt.

Es sei nachher $|y| < q_1$. Dann ist

$$y_1 = y^2 + p < q_1^2 + p = q_1 .$$

Weil ferner von y unabhängig

$$y_1 \geqq p > -q_1,$$

so gilt $|y_1| < q_1$ für $|y| < q_1$ und allgemein $|y_n| < q_1$. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Aus dem Obigen folgt schon, dass sämtliche reellen Fixpunkte der Abbildungen (2,1) im Falle (4,2) im Intervall (4,3) gelegen sind.

Es sei nun insbesondere $p \leqq 0$. Sei ferner y zuerst ein Punkt des Intervalles (4,4). Wegen

$$p < p_1 < -p$$

ist dann

$$p \leqq y_1 = y^2 + p \leqq p^2 + p = p_1 .$$

Es gehöre y nachher zum Intervall (p_1, q_1). Weil für $p < 0$

$$q_2 < p_1 < q_1,$$

folgt aus (4,5) $y_1 < y$. Wenn nun y_1 noch nicht zum Intervall (p_1, q_1) gehört, ist $y_2 < y_1$, usw. Nach endlich vielen Schritten muss man zu einem Punkt y_n des Intervalles (4,4) gelangen. Andernfalls hätte man mit einer monoton abnehmenden unendlichen Folge (1,2) zu tun, deren Grenzpunkt zum Intervall (p_1, q_1) gehörte. Dies enthält aber einen Widerspruch, weil der genannte Grenzpunkt, der als Fixpunkt von (1,1) mit dem Punkt q_2 zusammenfallen müsste, zum genannten Intervall nicht gehört. Unsere Behauptung ist damit endgültig bewiesen.

5. Es soll nun im Folgenden die Lage der Fixpunkte und die Attraktionsintervalle der zugehörigen Zyklen in den einfachsten Fällen genauer untersucht werden.

Fall $\frac{1}{4} > p > -\frac{3}{4}$. Beim Übergang des extremen Wertes $p = \frac{1}{4}$, wo ein indifferenter Zyklus $q_1 = q_2$ vorliegt, entsteht ein repulsiver positiver Zyklus erster Ordnung q_1 und ein attraktiver positiver Zyklus erster Ordnung q_2. Dieser letztere Zyklus geht für $p = 0$ in einen Nullzyklus $q_2 = 0$ über und er bleibt nachher auf dem Restintervall $0 > p > -\frac{3}{4}$ attraktiv und negativ. Betreffs der Iteration von (1,1) gilt im vorliegenden Falle der

Satz 3. *Für die Werte* $\frac{1}{4} > p > 0$ *des Parameters* p *ist*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = q_2 + 0 \quad \text{für} \quad q_2 < y < q_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = q_2 - 0 \quad \text{für} \quad -q_2 < y < q_2 .$$

Für die Werte $0 > p > -\frac{3}{4}$ *des Parameters gilt*

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+\nu} = q_2 + 0\,,\ \lim_{n\to\infty} y_{2n+1+\nu} = q_2 - 0 \ \text{ auf } (\varrho_\nu, \varrho_{\nu-1}),$$
$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1+\nu} = q_2 + 0\,,\ \lim_{n\to\infty} y_{2n+\nu} = q_2 - 0 \ \text{ auf } (-\varrho_{\nu+1}, -\varrho_\nu).$$

Hier bedeuten ϱ_ν die Grössen

$$\varrho_0 = q_2 \, , \, \varrho_1 = - q_2 \, , \, \varrho_2 = \sqrt{\bar{p} - q_2} \, , \ldots \qquad (\bar{p} = - p) \, ,$$

welche aus der Rekursionsformel

$$\varrho_{\nu+1} = \sqrt{\bar{p} + \varrho_\nu} \qquad (\nu = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \ldots)$$

berechnet werden können und für $n \to \infty$ gegen den durch den unendlichen Ausdruck

$$q_1 = \sqrt{\bar{p} + \sqrt{\bar{p} + \sqrt{\bar{p} + \cdots}}}$$

dargestellten repulsiven Fixpunkt q_1 von (1,1) konvergieren.

Einfacher: *Es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} y_n = q_2$$

für $|y| < q_1$.

Im Falle $p > 0$ hat man es hier mit einer monotonen Folge (1,2), im Falle $p < 0$ mit einer alternierenden Folge zu tun.

Fall $(-\frac{3}{4} < p < -\frac{1}{4})$. Beim Übergang des Wertes $p = -\frac{3}{4}$ wird q_2 repulsiv. Gleichzeitig entsteht aber ein attraktiver Zyklus $(\bar{q}_1 \, , \bar{q}_2)$ zweiter Ordnung, wo $\bar{q}_1 \, , \bar{q}_2$ die Fixpunkte (2,8) von (2,7) bezeichnen. Der neue Zyklus ist für $p > -1$ positiv, für $p = -1$ ein Nullzyklus und für $p < -1$ negativ.

Betreffs der Iteration von (2,7) gilt hier der folgende Satz, den wir nur in einer einfachen Form formulieren wollen.

Satz 4. *Bei der Iteration von* (2,7) *hat man in den Intervallen* $(\varrho_\nu \, , \varrho_{\nu+1})$

$$(\nu = 0 \, , \pm 1 \, , \pm 2 \, , \ldots)$$

abwechselnd den Grenzpunkt $\bar{q}_1$ *bzw.* $\bar{q}_2$, *so dass der Grenzpunkt auf* $(\varrho_0 \, , \varrho_1)$ *gleich* q_1 *und auf* $(\varrho_1 \, , \varrho_2)$ *gleich* q_2 *ist.*

Es bleibt noch der Fall

$$-2 < p < -\tfrac{3}{4}$$

übrig, wo sehr komplizierte Verhältnisse auftreten. Zweck der folgenden Betrachtungen ist, gewisse allgemeine Bemerkungen betreffs der hier geltenden Verhältnisse zu machen.

4. Eigenschaften der Polynome $G_n(p)$.

6. Weil jedes Polynom $G_n(p)$ für $p = 0$ verschwindet, kann man setzen

(6,1)
$$G_n(p) = p \Gamma_n(p) \, ,$$

wo $\Gamma_n(p)$ ein Polynom vom Grade $2^{n-1} - 1$ bezeichnet, welches der Rekursionsgleichung

$$(6,2) \qquad \Gamma_{n+1} = 1 + p\Gamma_n^2$$

genügt. Die ersten unter den Polynomen $\Gamma_n(p)$ sind

$$(6,3) \qquad \Gamma_1(p) = 1 \, , \, \Gamma_2(p) = p + 1 \, , \, \Gamma_3(p) = p(p+1)^2 + 1 \, .$$

Aus der Definition (6,1) der neuen Polynome geht ferner hervor, dass allgemein

$$\Gamma_{mn}(p) \qquad (m = 1 \, , 2 \, , 3 \, , \ldots)$$

durch $\Gamma_n(p)$ teilbar ist.

Eine für das Folgende wichtige Eigenschaft der Polynome $\Gamma_n(p)$ wird durch den folgenden Satz ausgesprochen.

Satz 5. *Es gilt im Intervall* $(-2 \leqq p \leqq 0)$

$$(6,4) \qquad |\Gamma_n(p)| \leqq 1 \, .$$

Um dies vermittels einer vollständigen Induktion zu beweisen, nehmen wir an, es sei dort $|\Gamma_n| \leqq 1$. Ist dann

$$|p\Gamma_n^2| = \varepsilon \leqq 1 \, ,$$

so gilt

$$|\Gamma_{n+1}| = 1 - \varepsilon \leqq 1 \, .$$

Ist dagegen $|p\Gamma_n^2| > 1$, so gilt

$$|\Gamma_{n+1}| = |p\Gamma_n^2| - 1 \leqq 2 - 1 = 1 \, .$$

Jedenfalls ist somit $|\Gamma_{n+1}| \leqq 1$. Weil nun $\Gamma_1 = 1$, ist unser Satz damit bewiesen.

Als Korollar folgt hieraus für $-2 \leqq p \leqq 0$

$$(6,5) \qquad \Gamma_n \geqq 1 + p \, .$$

Wir bemerken noch, dass wegen (6,2) und (6,3)

$$(6,6) \qquad \begin{aligned} &\Gamma_n(-2) = -1 \text{ für } n > 1 \, , \\ &\Gamma_{2n}(-1) = 0 \, , \, \Gamma_{2n+1}(-1) = 1 \text{ für } n \geqq 1 \, . \end{aligned}$$

Betreffs der Lage der Nullstellen der Polynome $\Gamma_n(p)$ gilt nun der

Satz 6. *Alle reellen Nullstellen der Polynome* $\Gamma_n(p)$ *gehören zum Intervall* $-2 < p \leqq -1$.

Dass es keine positiven Nullstellen gibt, folgt daraus, dass die Koeffizienten der Polynome $\Gamma_n(p)$ nichtnegative (ganze rationale) Zahlen sind.

Es sei zweitens $p \leqq -2$. Dann ist $|\Gamma_n| > 1$. Denn angenommen, dass $|\Gamma_n| > 1$, folgt aus (6,2) $|\Gamma_{n+1}| > 1$. Für $p \leqq -2$ gibt es also keine Nullstellen.

Es sei schliesslich $-1 < p < 0$. Wäre dort $\Gamma_n = 0$, so hätte man die Gleichung

$$\Gamma_n = 1 + p\Gamma_{n-1}^2 = 0 \, ,$$

woraus

$$|\Gamma_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt{|p|}} > 1$$

folgen würde, was unserem Satz 5. widerspricht. Der Satz 6. ist damit bewiesen.

Beispiele. Das Polynom Γ_2 hat die einzige triviale Nullstelle $p = -1$. Das Polynom Γ_3 hat eine einzige reelle Nullstelle

$$p = \tau \approx -\tfrac{7}{4}\,.$$

Die Anzahl der primitiven Nullstellen von Γ_4, Γ_5 und Γ_6 ist bzw. zwei, drei und fünf.

7. Wir werden im Folgenden gewisse allgemeine Sätze aufstellen, welche sich auf die gegenseitige Lage der Nullstellen der Polynome $\Gamma_n(p)$ beziehen.

Satz 7. *Zwischen zwei Nullstellen x_{n-1} und x_n von Γ_{n-1} bzw. Γ_n liegt wenigstens eine Nullstelle von Γ_{n+1}.*

Zum Beweis braucht man nur auf (6,2) hinweisen, wonach

$$\Gamma_{n+1}(x_n) = 1\,, \; \Gamma_{n+1}(x_{n-1}) = 1 + p < 0\,.$$

Satz 8. *Zwischen zwei Nullstellen x_{n-2} und x_n von Γ_{n-2} bzw. Γ_n liegt wenigstens eine Nullstelle von Γ_{n+1}, wenn $p < \tau$.*

Wegen (6,2) ist nämlich

$$\Gamma_{n+1}(x_n) = 1\,, \; \Gamma_{n+1}(x_{n-2}) = 1 + p(p+1)^2 = \Gamma_3 < 0\,.$$

Man könnte neue analoge Sätze für genügend nahe an $p = -2$ liegende Werte von p aufstellen. Statt dessen wollen wir noch aus Satz 7. den folgenden durch Verallgemeinerung erhaltenen Satz ableiten.

Satz 9. *Es seien m und n relative prime ganze Zahlen* $(m > n)$. *Dann liegt zwischen zwei Nullstellen x_m und x_n von Γ_m bzw. Γ_n wenigstens eine Nullstelle von Γ_l, wo $l = m\mu + 1$.*

Zum Beweis bestimmen wir die positiven ganzen Zahlen μ und ν aus der diophantischen Gleichung

$$m\mu - n\nu = 1\,.$$

Nach Satz 7. liegt dann zwischen den Punkten x_m und x_n, die Nullstellen von $\Gamma_{m\mu}$ bzw. $\Gamma_{n\nu}$ sind, wenigstens eine Nullstelle von Γ_l, wo $l = m\mu + 1$.

5. Die singulären Werte des Parameters.

8. Aus dem im Vorwort zitierten Satz von Fatou folgt, dass es bei einem gegebenen reellen Wert von p höchstens einen attraktiven Zyklus gibt, der aus im Endlichen liegenden Punkten besteht. Hieraus folgt unmittelbar, dass sämtliche attraktiven Zyklen aus reellen Punkten bestehen.

Zum Beispiel gibt es für $p > \frac{1}{4}$ keine attraktiven Zyklen, für $-\frac{3}{4} < p < \frac{1}{4}$ hat man in q_2 den einzigen attraktiven Zyklus, für $-\frac{5}{4} < p < -\frac{3}{4}$ den einzigen solchen Zyklus $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$. Für $p \leqq -2$ sind alle Zyklen repulsiv [4, S. 6].

Zweck der folgenden Betrachtungen ist die Existenz von attraktiven Zyklen in dem oben ausgeschlossenen Intervall

$$-2 < p < -\tfrac{5}{4} \tag{8,1}$$

zu untersuchen.

Jedenfalls gibt es attraktive Zyklen für die Nullstellen der Polynome $\Gamma_n(p)$, indem die zugehörigen Zyklen

$$y_\nu = G_{\nu+1}(p) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

sogar Nullzyklen sind. Wegen der stetigen Abhängigkeit des Multiplikators (3,3) von p folgt hieraus, dass man für jeden solchen Wert ein den betreffenden Punkt enthaltendes Intervall bestimmen kann, für dessen p-Werte es ein attraktiver Zyklus der entsprechenden Ordnung n gibt.

Definition: Wir nennen einen Wert p singulär, wenn es dann keinen attraktiven Zyklus gibt. Es soll im Folgenden die Existenz von singulären Werten p nachgewiesen werden, die Häufungsstellen der Nullstellen der Γ-Polynome sind.

Es seien, um dies einzusehen, x_n und x_{n+1} irgend zwei Nullstellen von Γ_n bzw. Γ_{n+1}. Nach Satz 7. gibt es dann zwischen x_n und x_{n+1} wenigstens eine Nullstelle x_{n+2} von Γ_{n+2}, ferner zwischen x_{n+1} und x_{n+2} wenigstens eine Nullstelle x_{n+3} von Γ_{n+3} usw. Die Intervalle

$$(x_\nu, x_{\nu+1}), \qquad (\nu = n, n+2, n+4, \ldots)$$

von denen jedes im Vorangehenden als echter Teil enthalten ist, besitzen wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Angenommen, dass es z.B. nur einen einzigen gemeinsamen Punkt p^* gibt, definiert derselbe einen singulären p-Wert. Um dies einzusehen, nehmen wir indirekt an, es gehöre zu p^* ein attraktiver Zyklus der Ordnung N. Dann wäre für genügend nahe an p^* liegende p-Werte ein attraktiver Zyklus der Ordnung N vorhanden. Zur genannten Umgebung gehören nach der Definition von p^* attraktive Zyklen beliebig hoher Ordnung, welche keine Vielfachen von N sind. Es wären also zwei verschiedene attraktive Zyklen vorhanden, was dem Fatouschen Satz widerspricht.

Um ein konkretes Beispiel zu geben, betrachten wir die Gleichung

$$\tilde{p} = \sqrt{\tilde{p} + \sqrt{\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p} \cdots - \sqrt{\tilde{p}}}}}}\,, \quad (\tilde{p} = -p) \tag{8,2}$$

wo die Anzahl der Wurzelzeichen mit -Zeichen gleich n ist. Die durch (8,2) bestimmten Zahlen p_n genügen der Gleichung

$$\Gamma_{n+2}(p) = 0$$

und sie sind somit Nullstellen des Polynoms Γ_{n+2}. Nun erhält man aus (8,2) durch Grenzübergang $n \to \infty$ die Gleichung

$$\tilde{p} = \sqrt{\tilde{p} - q_2}\,, \tag{8,3}$$

wo

$$q_2 = -\sqrt{\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p} - \ldots}}}$$

einen Fixpunkt (2,6) von (1,1) bezeichnet. Aus (8,3) ergibt sich für p die kubische Gleichung

$$p^3 - 2p^2 + 2p - 1 = 0\,,$$

deren negative Wurzel somit einen singulären p-Wert der gesuchten Art gibt.

Es soll als zweites Beispiel nachgewiesen werden, dass der Wert $p = -2$ ein singulärer p-Wert der genannten Art ist.

Es sei x_n die letzte, d.h. algebraisch kleinste Nullstelle von Γ_n. Es soll vermittels einer vollständigen Induktion gezeigt werden, dass im Intervalle $\Delta_n(-2\,, x_n)$

$$\Gamma'_{n+1} > 0\,,\ \Gamma''_{n+1} < 0 \tag{8,4}$$

gilt.

Weil auf $\Delta_n : \Gamma_n < 0$, so folgt aus

$$\Gamma'_{n+1} = \Gamma_n^2 + 2p\Gamma_n\Gamma_n'\,,$$

dass $\Gamma'_{n+1} > 0$, wenn $\Gamma_n' > 0$. Weil nun $\Gamma_2' = 1$, ist der erste Teil unserer Behauptung (8,4) bewiesen.

Aus

$$\Gamma''_{n+1} = 4\Gamma_n\Gamma_n' + 2p(\Gamma_n'^2 + \Gamma_n\Gamma_n'')$$

folgt ferner, wegen

$$\Gamma_n < 0\,,\ \Gamma_n' > 0\,,\ \Gamma_n'' < 0\,,$$

dass

$$\Gamma''_{n+1} < 0\,,$$

also der zweite Teil von (8,4).

Wegen (8,4) ist der zu Γ_{n+1} gehörige Bogen im Intervall Δ_n konvex nach oben. Für den Abstand $\bar{\Delta}_n$ des Nullpunktes x_n vom Punkt $p = -2$ folgt hieraus

$$\bar{\Delta}_{n+1} < \tfrac{1}{2}\,\bar{\Delta}_n$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\Delta}_n = 0\,,$$

womit unsere Behauptung endgültig bewiesen worden ist.

6. Iteration im komplexen Gebiet.

9. Wir haben uns im Vorhergehenden auf die Untersuchung der Iteration für die reellen Werte von y eingeschränkt. Man kann daraus ein Resultat gewinnen, welches die von uns für die Iteration im komplexen Gebiet gewonnenen Ergebnisse einigermassen ergänzt. Es handelt sich dabei um die Untersuchung des zum unendlich fernen Punkt gehörigen Attraktionsgebiets D_∞, also der Menge derjenigen Punkte der komplexen y-Ebene, für welche die Bildpunkte (1,2) gegen $y = \infty$ konvergieren. Eine Hauptaufgabe hat man in der Untersuchung derjenigen Werte des reellen Parameters p, für welche der Rand C von D_∞ aus einer diskreten oder kontinuierlichen Punktmenge besteht.

Wir haben schon früher bewiesen, dass der Rand für $p < -2$ aus einer diskreten Menge reeller Punkte des Intervalles $(-q_1, q_1)$ besteht [3]. Aus dem Hilfssatz von N:4 folgt nun unmittelbar, dass der Rand C im Falle $-2 \leqq p \leqq \frac{1}{4}$ aus kontinuierlichen Punktmengen besteht. Denn z.B. die Strecke $(-q_1, q_1)$ gehört jetzt nicht zum Gebiet D_∞.

Es erübrigt noch der Fall $p > \frac{1}{4}$. Es ist wahrscheinlich, dass jetzt der Rand von D_∞ aus einer diskreten Menge zur reellen Achse symmetrisch liegender Punkte besteht. Es ist allerdings uns bisher gelungen, unsere Behauptung nur für $p \geqq p_0$ zu beweisen, wo $p_0 = \frac{1}{2}$ gewählt werden kann.

Berichtigungen zu meiner Arbeit »Iteration der reellen Polynome zweiten Grades»

S. 8. Zeile 17 von oben soll lauten:

inverse Operation $y_{-1} = \sqrt{y - p}$ oder ihre Potenz — — —

Zeile 9 von unten: Das Zeichen nach $|C_n|$ soll $\leqq$ sein.

S. 10. Die in den zwei letzten Sätzen ausgesprochene Vermutung ist nach Kapitel 6. nicht stichhaltig.

Literatur.

[1] Fatou, P.: Sur les équations fonctionnelles-Bull. Soc. math. de France 47 (1919) et 48 (1920).

[2] Julia, G.: Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles-J. math. et appl. (8). 1. (1918).

[3] Myrberg, P. J.: Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels-Ann. Acad. Sci. Fennicæ, A. I. Mathematica 253 (1958).

[4] —»— Iteration der reellen Polynome zweiten Grades-Ibidem 256 (1958).

[5] —»— Iteration von Quadratwurzeloperationen-Ibidem 259 (1958).

Gedruckt XI. 1959.