Zeitschriftendaten

Titel: Journal de mathÃ©matiques pures et appliquÃ©es

Standort: V | Signatur: XIX/770.4 | Fachgruppe: E 1
Volume: 41 | Jahr: 1962 | Heft:

Artikeldaten

Titel: Sur litération des polynômes réels quadratiques

Autor: Myrberg
Seiten: 339-351

Langtitel

PPN: 014996855
Zeitschrift: Journal de mathÃ©matiques pures et appliquÃ©es
Erschienen: Paris : Gauthier-Villars
Amsterdam [u.a.] ; Jena : Elsevier, 1836
Ersch.-verlauf: 1.1836 - 20.1855; 2.SÃ©r. 1.1856 - 19.1874; 3.SÃ©r. 1.1875 - 10.1884; 4.SÃ©r. 1.1885 - 10.1894; 5.SÃ©r. 1.1895 - 10.1904; 6.SÃ©r. 1=[70]1905 - 10=79.1914; 7.SÃ©r. 1=80.1915 - 4=83.1918; 8.SÃ©r. 2=84.1919 - 4=86.1921; 9.SÃ©r. 1=87.1922 - 73=156.1994; 74.1995 - 75.1996; 76=AnnÃ©e 162.1997 -
Anmerkung: Repr.: Nendeln : Kraus
6.SÃ©r. 70.1905 - 73.1908 fälschlich als Bd. 60 - 63 bez.; 7.SÃ©r. 4.1918 auf d. Hefttitelbl. als 8.SÃ©r. 1.1918 bez.; Bd. 112 d. 9.SÃ©r. übergangen

Bibliogr. Zusammenhang: Internetausg.: Journal de mathÃ©matiques pures et appliquÃ©es
Internetausg.: Journal de mathÃ©matiques pures et appliquÃ©es
Vorg.: Annales de mathÃ©matiques pures et appliquÃ©es

ISSN: 0021-7824

Coden: JMPAA
ZDB-ID: 218332-8

ZDB-Notation: 790
Sachgebiete: SSG-Nummer: 17,1

Sur l'itération des polynomes réels quadratiques ;

Par P. J. MYRBERG.

1. Introduction. — La théorie générale de l'itération des fonctions rationnelles est une branche d'analyse fondée et développée dans les grandes lignes par G. Julia et P. Fatou dans leurs travaux remarquables parus il y a plus de quarante années (¹). Malgré les exemples particuliers qu'on y trouve et qui sont propres à expliquer certains phénomènes qu'on rencontre dans ce domaine, on n'a pu jusqu'ici, même dans le cas des polynomes, trouver une solution complète du problème en question.

En nous limitant dans le travail présent au cas le plus simple non linéaire, c'est-à-dire aux polynomes réels de second degré, nous observons que même dans ce cas spécial on rencontre des difficultés considérables, dont l'explication exigera des recherches ultérieures.

Comme application, nous traiterons à la fin les fonctions entières ayant un théorème de multiplication réel quadratique, dont certaines fonctions exponentielles et trigonométriques nous donnent des exemples.

2. Généralités. — Comme point de départ nous choisissons le polynome

(2.1) $$x_1 = x^2 + p = P_1(x) \qquad (p \text{ réel}),$$

(¹) G. Julia, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris : Grand Prix des Sciences mathématiques, 1918) (*J. Math. pures et appl.*, 7ᵉ série, t. 4, 1918); P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 47, 1919 et t. 48, 1920).

auquel on peut, par un changement linéaire de variable, réduire chaque polynome réel quadratique. En l'itérant n fois on parvient à un polynome

$$x_n = P_n(x) \tag{2.2}$$

de degré 2^n, dont les membres sont des fonctions rationnelles entières de p ayant comme coefficients des nombres entiers non négatifs. Dans ce qui suit, le dernier coefficient $P_n(0) = G_n(p)$ de degré 2^{n-1} en p nous intéresse spécialement. Ce coefficient peut être calculé, pour chaque valeur n, par la formule de récurrence

$$G_{n+1}(p) = G_n^2(p) + p \tag{2.3}$$

en observant que $G_1(p) = p$.

Regardons maintenant l'équation

$$P_n(x_0) = x_0 \tag{2.4}$$

définissant les points fixes de la substitution (2.2). Les points

$$x_\nu = P_\nu(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.5}$$

sont alors eux-mêmes des points fixes de (2.2) qui se permutent circulairement si l'on effectue la substitution (2.1). Les points (2.5) forment un cycle Σ_n d'ordre n qui est primitif, si les points (2.5) sont différents entre eux, ce qu'on peut toujours supposer. En vertu de la réalité de p, les points (2.5) sont en même temps tous réels ou tous imaginaires.

Formons maintenant l'expression

$$S = P'_n(x_\nu),$$

donnant la valeur commune de la dérivée de $P_n(x)$ dans les points fixes (2.5) de Σ_n. Cette quantité, le *multiplicateur* du cycle Σ_n, joue un rôle important en expliquant les propriétés géométriques de l'itération au voisinage des points du cycle en question. Nous appellerons le cycle attractif, répulsif ou indifférent selon que

$$|S| < 1, \qquad |S| > 1 \qquad \text{ou} \qquad |S| = 1.$$

Regardons spécialement les cycles-zéros, c'est-à-dire les cycles attractifs dont le multiplicateur $S = 0$. Outre le point à l'infini qui peut être regardé comme cycle-zéro d'ordre 1, les cycles de la catégorie en question peuvent exister seulement pour les valeurs réelles de p qui annulent un polynome $p_n = G_n(p)$. Dans ce cas, le cycle-zéro consiste dans les points

$$0, \quad p, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_{n-2}$$

formant un cycle d'ordre n.

L'importance de ces cycles ressort du fait que leur connaissance conduit à une construction des cycles attractifs de tous les ordres.

3. Sur les zéros réels des polynomes $G_n(p)$. — On constate immédiatement que chaque polynome $G_n(p)$ s'annule pour $p = 0$. On peut donc écrire

$$G_n(p) = p\Gamma_n(p), \tag{3.1}$$

où $\Gamma_n(p)$ est un polynome de degré $2^{n-1} - 1$ de la même sorte que $G_n(p)$ et vérifiant à la formule de récurrence

$$\Gamma_{n+1}(p) = 1 + p\Gamma_n^2(p). \tag{3.2}$$

Les premiers parmi ces polynomes sont

$$\Gamma_1(p) = 1, \qquad \Gamma_2(p) = 1 + p, \qquad \Gamma_3(p) = 1 + p(1+p)^2.$$

On démontre facilement que

$$\Gamma_n(-2) = -1 \qquad \text{pour} \quad n > 1$$

et

$$\Gamma_n(0) = 1, \qquad \Gamma_{2n-1}(-1) = 0, \qquad \Gamma_{2n-1}(-1) = 1 \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1.$$

Les coefficients de $\Gamma_n(p)$ étant tous non négatifs, tous les zéros réels doivent être négatifs.

Pour indiquer d'une manière plus précise leur position, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *On a dans l'intervalle* $(-2 \leqq p \leqq 0)$

$$|\Gamma_n(p)| \leqq 1. \tag{3.3}$$

Pour le démontrer par induction, nous supposons que (3.3) a lieu pour une certaine valeur n. Si d'abord $|p\Gamma_n^2| < \varepsilon < 1$, on a, en vertu de (3.2), $|\Gamma_{n+1}| < \varepsilon < 1$. Si en second lieu $|p\Gamma_n^2| \geqq 1$, on a $|\Gamma_{n+1}| = |p\Gamma_n^2| - 1 \leqq 1$. Comme $\Gamma_1 = 1$, notre théorème 1 est démontré.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème suivant, donnant d'une manière plus précise la position des zéros des polynomes $\Gamma_n(p)$.

Théorème 2. — *Tous les zéros réels de $\Gamma_n(p)$ appartiennent à l'intervalle*

$$-2 < p \leqq -1. \tag{3.4}$$

Soit d'abord $p \leqq -2$. On a alors $|\Gamma_n(p)| > 1$. En effet, en supposant que $|\Gamma_n| > 1$ on obtient de (3.2)

$$|\Gamma_{n+1}| = |p\Gamma_n^2| - 1 \geqq 2\Gamma_n^2 - 1 \geqq 1.$$

Soit ensuite $-1 < p < 0$. On a alors, en vertu de (3.2),

$$|\Gamma_n| = \frac{1}{\sqrt{|p|}} > 1,$$

en contradiction avec le théorème 1. Notre théorème 2 est ainsi complètement démontré.

On peut démontrer que le nombre N des zéros réels de Γ_n augmente indéfiniment avec n [6]. Nous nous contenterons ici de donner ce nombre N pour les premières valeurs de n :

n........	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N........	1	1	2	3	5	9	16	28	51

4. Valeurs singulières du paramètre p. — Regardons maintenant l'ensemble des points représentant les zéros réels des différents polynomes $\Gamma_n(p)$ qui, comme nous l'avons vu, sont tous situés dans l'intervalle (3.4).

Leur nombre étant infini, on peut se proposer de déterminer leurs points d'accumulation. Les valeurs du paramètre p correspondantes, *valeurs singulières de p*, jouissent alors d'une propriété remarquable : il existe dans leur voisinage des valeurs de p conduisant aux cycles attractifs dont l'ordre est supérieur à un nombre quelconque donné d'avance.

Une méthode simple pour la construction des valeurs singulières de p est fondée sur le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Entre deux zéros x_{n-2} et x_{n-1} de Γ_{n-2} resp. Γ_{n-1} il existe toujours au moins un zéro x_n de Γ_n.*

On a en effet d'après (3.2) pour $p < -1$:

$$\Gamma_n(x_{n-1}) = 1, \qquad \Gamma_n(x_{n-2}) = 1 + p < 0,$$

d'où résulte notre théorème 3.

L'ensemble des valeurs singulières étant fermé, il possède un maximum p_M et un minimum p_m. Nous avons dans notre travail [5] démontré que $p_M = -2$. Il reste encore à déterminer le minimum p_m.

Une solution de ce problème est fournie par le théorème suivant, dont nous ne donnerons la démonstration qu'à grands traits en renvoyant à notre travail [6].

THÉORÈME 4. — *Il existe un nombre infini d'intervalles de p :*

$$(4.1) \qquad \Delta_\nu : \quad \pi_{\nu+1} < p < \pi_\nu$$

ayant les propriétés suivantes :

1. *Chaque intervalle Δ_ν contient un seul zéro τ_ν des polynomes Γ_n, à savoir un zéro de Γ_{2^ν}.*

2. *Pour les valeurs p d'intervalle Δ_ν, il existe un cycle attractif réel d'ordre 2^ν devenant cycle-zéro pour $p = \tau_\nu$.*

3. *Il existe la limite*

$$\lim_{\nu \to \infty} \tau_\nu = p_m > -2$$

et cette limite est égale au minimum cherché.

Pour la démonstration nous partons des points fixes

$$(4.2) \qquad q_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - p}, \qquad q_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - p}$$

de la substitution (2.1), réels pour $p \leq \frac{1}{4}$. Le point fixe q_1 étant toujours attractif $\left(\text{indifférent pour } p = \frac{1}{4}\right)$, le point fixe q_2 est attractif seulement pour les valeurs

$$\Delta_0 : \quad -\frac{3}{4} < p < \frac{1}{4}.$$

En dépassant la valeur $p = -\frac{3}{4}$, le point q_2 devient indifférent avec le multiplicateur $S = -1$ et ensuite répulsif. En même temps les points fixes nouveaux

$$(4.3) \qquad \tilde{q}_\mu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4} - p} \qquad (\mu = 1, 2)$$

de $P_2(x)$ seront réels formant un cycle attractif de deuxième ordre pour les valeurs

$$\Delta_1 : \quad -\frac{5}{4} < p < -\frac{3}{4}.$$

Dans ce nouvel intervalle est situé le point $p = -1$, zéro de $\Gamma_2(p)$. Pour la valeur $p = -\frac{5}{4}$ le cycle $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ est indifférent ayant le multiplicateur $S = -1$ pour devenir ensuite répulsif. En même temps on obtient un cycle de quatrième ordre réel et attractif et ainsi de suite.

Quant à la troisième propriété, elle est la conséquence d'un théorème général trouvé par G. Julia et P. Fatou, limitant le nombre des cycles attractifs par l'ordre de la fonction rationnelle itérée [2]. D'après ce théorème il ne peut exister, dans le cas actuel, qu'un seul cycle attractif (ou indifférent) au plus, outre le point à l'infini. Il s'ensuit évidemment que le nombre p_m doit être plus grand que tous les zéros des polynomes Γ_n différents des zéros τ_ν.

On trouve par interpolation pour p_m la valeur approximative $p_m = -1{,}401\,155$.

Nous faisons remarquer pour terminer que, pour une valeur singulière du paramètre p, la substitution correspondante (2.1)

---

[2] G. Julia, p. 137; P. Fatou, p. 141.

a une propriété remarquable : le nombre des valeurs limites constantes des fonctions itérées $P_n(x)$ est infini.

5. L'EXISTENCE DES CYCLES ATTRACTIFS. — Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, propre à expliquer la nature des cycles pour différentes valeurs du paramètre réel p.

THÉORÈME 5. — *Pour les valeurs $p > \frac{1}{4}$ tous les cycles sont imaginaires et répulsifs, pour $p \leqq -2$, ils sont tous réels et répulsifs. Pour les valeurs restantes de p :*

$$-2 < p < \frac{1}{4} \tag{5.1}$$

il existe aussi bien des cycles réels que des cycles imaginaires. Seuls les premiers peuvent être attractifs, les cycles imaginaires étant toujours répulsifs.

Pour la démonstration, nous regardons d'abord le cas $p > \frac{1}{4}$. Si alors x est un point réel quelconque, on aura

$$x_1 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{1}{4}\right) > 0,$$

d'où il suit que la suite indéfinie

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

est monotone et croissante. La limite de cette suite, étant évidemment un point fixe de la substitution (2.1), elle ne peut pas être finie, les points fixes (4.2) étant maintenant imaginaires.

On a donc pour toute valeur réelle de x :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty,$$

d'où il résulte qu'il n'existe pas de cycles réels. Les cycles étant donc imaginaires et deux à deux conjugués, il en est de même pour leurs multiplicateurs. En vertu du théorème de G. Julia et P. Fatou, cité dans le chapitre 4, les cycles sont donc répulsifs.

Quant au cas $p \leqq -2$, nous renvoyons pour la démonstration à notre travail [2].

Passons maintenant au troisième cas (5.1). Soit alors p_0 un zéro d'un polynome $\Gamma_n(p)$. Le multiplicateur S étant égal à zéro pour le cycle-zéro correspondant, il existe, à cause de la continuité de la fonction $S = S(p)$, un intervalle

$$(5.2) \qquad p_0 - \varepsilon < p < p_0 + \varepsilon,$$

pour lequel $|S| < 1$, le cycle en question est donc attractif. Il existe donc une infinité dénombrable d'intervalles de p, extérieurs l'un à l'autre, pour lesquels il existe des cycles réels attractifs conduisant aux cycles-zéros par une variation continue du paramètre p.

Notre théorème étant ainsi démontré, il reste encore un problème pour que soit complète l'explication du cas présent, à savoir la détermination des propriétés de l'ensemble complémentaire des sommes des intervalles (5.2). Malheureusement nous sommes obligés de nous borner aux remarques précédentes à cause des difficultés que nous n'avons pas pu jusqu'ici complètement surmonter.

6. Domaine d'attraction du point à l'infini. — Soit en général $\tilde{D}_q$ le domaine total de convergence d'un point fixe q, c'est-à-dire l'ensemble des points x pour lesquels la suite infinie des points itérés $x_\nu = P_\nu(x)$ converge vers q. D'après la théorie générale, l'ensemble $\tilde{D}_q$ est constitué par un domaine connexe D_q, domaine immédiat de convergence renfermant le point fixe q et par ses antécédents, c'est-à-dire par les domaines obtenus de D_q par l'itération de la substitution inverse algébrique.

En choisissant $q = \infty$ nous avons, pour la détermination du domaine correspondant D_∞, à distinguer entre trois cas différents traités déjà ci-dessus.

Premier cas : $p > \frac{1}{4}$. — Dans ce cas, où tous les cycles sont imaginaires et répulsifs, le domaine D_∞, formant en même temps le domaine total d'attraction, est un domaine de connexité infinie, dont la frontière se compose d'une infinité de points formant un ensemble discret.

Deuxième cas : $p \leqq -2$. — Dans ce cas où tous les cycles sont réels et attractifs, la frontière de D_∞ se compose d'un ensemble de points situés dans l'intervalle

$$-q_1 \leqq x \leqq q_1. \tag{6.1}$$

Cet ensemble est discret pour $p < -2$ et identique à l'intervalle (6.1), où $q_1 = 2$ pour $p = -2$. Pour la démonstration nous renvoyons à notre travail [2].

Troisième cas : $-2 < p < \frac{1}{4}$. — Pour aborder ce cas compliqué, nous faisons remarquer d'abord que la partie (6.1) de l'axe réel est située en dehors de D_∞. On a en effet pour les points de (6.1)

$$x_1 = x^2 + p \leqq q_1^2 + p = q_1,$$

et d'autre part, on a

$$x_1 \geqq p > -q_1.$$

Il s'ensuit que la frontière C de D renferme des continus séparant les points de l'intervalle (6.1) du point fixe $x = \infty$.

Cette remarque préliminaire étant faite, nous allons démontrer le

THÉORÈME 6. — Pour $p > 0$ *la frontière de* D_∞ *est située en dehors du cercle*

$$K: \ |x| = q_1,$$

pour $p < 0$ *à l'intérieur de* K. *Pour* $p = 0$ *la courbe* C *est identique avec* K.

Posons pour la démonstration :

$$x = r e^{i\omega}, \qquad x_n = r_n e^{i\omega_n}.$$

On aura alors

$$r_1^2 = r^4 + p^2 + 2pr^2 \cos 2\omega.$$

Soit d'abord $p > 0$. On a alors pour $r \leqq q_1$:

$$r_1 \leqq r^2 + p \leqq q_1^2 + p = q_1$$

et plus généralement $r_n \leqq q_1$. Le point x est donc situé en dehors de D_∞.

Soit en second lieu $p < 0$. Si $r \geqq q_1$, on aura

$$r_1 \geqq r^2 + p \geqq q_1^2 + p = q_1.$$

D'une manière plus précise, on a

$$r_1 - q_1 \geqq r^2 - q_1 \geqq 2 q_1 (r - q_1)$$

d'où

$$r_n - q_1 \geqq (2 q_1)^n (r - q_1),$$

donc

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \infty,$$

puisque $|2 q_1| > 1$. Notre théorème est ainsi complètement démontré.

En appliquant une méthode employée par Julia pour certains exemples numériques, on peut démontrer que dans le troisième cas le domaine D_∞ consiste en un domaine simplement connexe, identique au domaine total de convergence.

Pour étudier la question d'une manière plus détaillée, nous regardons d'abord le cas $-\frac{3}{4} < p \leqq \frac{1}{4}$. Alors la frontière C de D_∞ est une courbe de Jordan fermée, symétrique par rapport à l'axe réel et entourant le point fixe attractif q_2.

Dans le cas actuel, elle rencontre cet axe seulement dans les points $\pm q_1$. Dans le cas extrême $p = \frac{1}{4}$ le point fixe indifférent $q_1 = q_2$ est situé sur la courbe C.

Supposons ensuite que $-\frac{5}{4} < p \leqq -\frac{3}{4}$. Dans ce cas la courbe C se compose de deux parties fermées se rencontrant dans le point fixe répulsif q_2 et de ses antécédantes.

En dépassant la valeur $p = -\frac{5}{4}$ le nombre des parties de C s'augmente indéfiniment. Les courbes partielles composant C se rencontrent dans les points fixes des cycles répulsifs ou leurs antécédents. Ces courbes entourent des domaines dont l'ensemble forme le domaine total de convergence pour un cycle fini attractif.

7. Sur les fonctions entières ayant un théorème de multiplication réel quadratique. — Comme application nous traiterons l'équation fonctionnelle

$$\varphi(kt) = \varphi^2(t) + p \tag{7.1}$$

appartenant à la catégorie des équations étudiées par Poincaré. Parmi les fonctions entières, satisfaisant à une équation de la forme (7.1), on peut nommer les fonctions

$$\varphi(t) = e^t \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 2\cos t$$

obtenues pour les valeurs $p = 0$ resp. $p = -2$.

En cherchant les solutions entières de (7.1) nous introduirons le développement toujours convergent de $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

En la substituant dans (7.1) et en comparant les coefficients des diverses puissances de t, on aura pour les coefficients c_n des expressions dépendant d'un paramètre. La solution générale de (7.1) peut alors s'exprimer sous la forme

$$\varphi_n(t) = \varphi(c_n t^n)$$

par une solution spéciale satisfaisant aux conditions

$$\varphi(0) = q, \qquad \varphi'(0) = 1,$$

où $k = 2q$ et où q est un point répulsif de (2.1). Nous nous contentons pour la brièveté de traiter un seul cas, en choisissant $q = q_1$.

En observant que la fonction $\varphi(t)$ donne une représentation conforme dans le point $t = 0$, on déduit du théorème 6, comme conséquence immédiate le théorème suivant, donnant les valeurs asymptotiques de la fonction $\varphi(t)$ sur les rayons tracés par l'origine.

Théorème 7. — *La fonction $\varphi(t)$ admet pour $t \to +\infty$ la valeur asymptotique infinie sur chaque rayon contenu dans un certain angle*

$$A^+(p): \quad -\alpha < \arg t < \alpha,$$

où $\alpha < \frac{\pi}{2}$ pour $p < 0$ et $\alpha > \frac{\pi}{2}$ pour $p < 0$.

Elle admet pour $p > -\frac{3}{4}$ *la valeur asymptotique* q_2 *sur chaque rayon contenu dans un certain angle*

$$A^-(p): \quad -(\pi - \beta) < \arg t < (\pi - \beta),$$

où $\beta > \frac{\pi}{2}$ *pour* $p > 0$ *et* $\beta < \frac{\pi}{2}$ *pour* $p < 0$.

Quant aux angles restants

$$A^0(p): \quad \alpha < |\arg t| < \pi - \beta$$

aucun rayon y situé ne peut conduire à une valeur asymptotique, les lignes correspondantes dans le plan x *étant des courbes coupant une infinité de fois la frontière de* D_∞.

Pour les angles $A(p)$ *qui dépendent d'une manière continue du paramètre* p, *on aura les valeurs suivantes dans quelques cas extrêmes :*

$$A^+\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \qquad A^+(p) = 2\pi \qquad \text{pour} \quad p \leqq -2,$$

$$A^-(p) = 0 \qquad \text{pour} \quad p < -\frac{3}{4}.$$

Quant au cas $p = 0$, *où* $\varphi(t) = e^t$, *on a*

$$A^+(0) = A^-(0) = \pi, \qquad A^0(0) = 0.$$

Nous regardons pour terminer le comportement de notre fonction $\varphi(t)$ pour les valeurs réelles de t.

Comme conséquence immédiate du théorème 6, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \infty$$

indépendamment de la valeur de p. Pour $t \to -\infty$ il existe, comme nous l'avons déjà vu, la limite

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = q_2$$

seulement pour $p > -\frac{3}{4}$. La courbe correspondante a la forme d'une courbe exponentielle si $p \geqq 0$, pour $p < 0$, on a affaire à une courbe coupant son asymptote une infinité de fois dans certains points formant une série géométrique.

Soit maintenant $-\frac{5}{4} < p < -\frac{3}{4}$. Dans ce cas il n'existe aucune valeur limite pour $t \longrightarrow \infty$. En revanche, il existe une valeur limite en remplaçant l'axe réel total par une suite infinie d'intervalles

$$\Delta_n(k^{2n} t_0, k^{2n} \tilde{t}_0), \qquad \Delta_n(k^{2n} \tilde{t}_0, k^{2n+1} t_0) \qquad (\tilde{t}_0 < t_0 < 0)$$

dont la longueur forme une série géométrique. On a en effet

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = \tilde{\eta}_1$$

pour les intervalles Δ_n et

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = \tilde{\eta}_2$$

pour les intervalles $\tilde{\Delta}_n$. On peut regarder les droites correspondantes comme asymptotes partielles du second ordre de la courbe en question.

Plus généralement, on obtiendra des asymptotes partielles d'ordre n pour les valeurs p, pour lesquelles il existe un cycle attractif d'ordre n. Au voisinage d'une valeur singulière du paramètre p, l'ordre des asymptotes partielles s'augmente indéfiniment.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Sur une généralisation de la moyenne arithmétique-géométrique de Gauss* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1938, p. 3201.)

[2] *Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels* (*Ann. Acad. Sc. Fennicæ*, A, 1, n° 253, 1958).

[3] *Iteration der reellen Polynome zweiten Grades* (*Ibid.*, n° 256, 1958.)

[4] *Iteration von Quadratwurzeloperationen* (*Ibid.*, n° 259, 1958).

[5] *Iteration der reellen polynome zweiten Grades*, II. (*Ibid.*, n° 268, 1959).

[6] *Iteration der reellen Polynome zweiten Grades*, III (*Ibid.*, n° 336/3, 1962).

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1961.)