Boletim da SPM - nº 47
Outubro de 2002

O NOVO BRILHO DAS EQUAÇÕES ABELIANAS

Jason Alfredo Carlson Gallas
Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

O dia 5 de agosto de 2002 marcou o bicentenário do nascimento do matemático norueguês Niels Henrik Abel, uma figura marcante não apenas pelo seu legado matemático como também pela sua vida curta e atribulada. Assim sendo, a comunidade matemática internacional tem realizado uma série de eventos cuja finalidade é comemorar os feitos de Abel e ver em que direções tais feitos nos têm conduzido. Os aspectos mais técnicos do trabalho de Abel foram discutidos, por exemplo, na *Conferência do Bicentenário de Abel*, que teve lugar entre 3 e 8 de junho de 2002 na Universidade de Oslo, enquanto que aspectos da vida de Abel foram discutidos recentemente por Lützen[1], ao fazer uma resenha do livro *Called too Soon by the Flames Afar: Niels Henrik Abel and His Times*, de Arild Stubhaug[2]. No início deste ano, o governo norueguês anunciou[3] a criação do Prêmio Abel, muito melhor dotado financeiramente que o Prêmio Nobel.

Juntando-nos a tais comemorações, na presente edição do *Boletim* oferecemos uma tradução portuguesa de um manuscrito de Abel entitulado *Memória sobre uma classe particular de equações resolúveis algebricamente*, publicado originalmente no "Jornal de Crelle"[4].

Mas, será que tal vetusto manuscrito poderá ainda hoje em dia ter algum interesse outro que o meramente histórico? A título de prolegômenos à tradução que segue, o objetivo deste texto é o de tentar fazer ver de que modo, além do imenso interesse matemático, o referido manuscrito tem-se mostrado mais e mais ser de fundamental importância para a compreensão de aspectos da física teórica moderna, mais precisamente na aplicação à fisica atômica de conceitos novos provenientes dos sistemas dinâmicos.

Dito de um modo sucinto, o artigo de Abel generaliza e estende os resultados apresentados por Gauss na *Sectio Septima* do famoso livro *Disquisitiones Arithmeticæ*[5], onde Gauss trata do problema geral de resolver as equações *ciclotômicas*, que aparecem quando se deseja dividir um círculo em um número arbitrário de partes iguais. Como mencionado por Gauss[6], apesar da divisibilidade *geométrica* (i.e. feita apenas com régua e compasso) do círculo em três e cinco partes iguais ser já conhecida desde o tempo de Euclides, nada havia sido acrescentado a esta descoberta durante os 2000 anos seguintes, até Gauss observar que a divisão geométrica também podia ser efetuada quando o número de lados fosse igual a $17, 257, 65537, \ldots$, i.e. a um *número de Fermat*, $2^{2^m} + 1$, que fosse primo, além de outros valores a eles relacionados[6].

Um dos problemas de imenso interesse na época de Abel era o de resolver-se *com radicais* (i.e. através do emprego de um número finito das quatro operações aritméticas elementares e de extrações de um número finito de raízes) equações algébricas de grau superior ao quarto. É que desde as famosas descobertas das soluções para equações cúbicas e quárticas pelos algebristas italianos que se buscavam intensamente obter soluções análogas para equações algébricas gerais de graus superiores. Abel não encontrou tal solução mas encontrou um sólido resultado ainda mais surpreendente. Independentemente da elaborada, bela e injustiçada demonstração encontrada por Ruffini[7], Abel publicou[8] em 1826 uma demonstração da total *impossibilidade* da resolução da equação algébrica geral de grau superior a quatro. Assim, após a descoberta de que as equações *gerais* de grau superior a quatro não podem ser resolvidas com radicais, o melhor que resta a fazer-se é (i) descobrir quais as equações que se podem resolver e (ii) resolvê-las. Esta é a tarefa que Abel se propõe ao generalizar o estudo feito por Gauss para as equações ciclotômicas, um conjunto muito particular e importante de equações que admite soluções.

A classe particular de equações resolúveis algebricamente descoberta por Abel baseia-se na seguinte observação[4]: se duas raízes x' e x_1 de uma equação algébrica $\varphi(x) = 0$ estiverem ligadas entre si por uma função racional $\theta(x)$, de modo que $x' = \theta(x_1)$, então as quantidades

$$x_1, \qquad \theta(x_1), \qquad \theta^2(x_1) \equiv \theta(\theta(x_1)), \qquad \theta^3(x_1) \equiv \theta(\theta^2(x_1)), \qquad \text{etc.} \tag{1}$$

serão todas elas raízes de $\varphi(x) = 0$. Mais ainda, Abel observa que se as raízes de uma equação $\varphi(x) = 0$ de um grau qualquer estiverem ligadas entre si como na Eq. (1), de modo que todas as suas raízes possam ser expressas racionalmente através de uma delas, digamos x, e se mais ainda, designando-se por $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ duas outras quaisquer das raízes em questão, se tiver

$$\theta(\theta_1(x)) = \theta_1(\theta(x)), \tag{2}$$

então a equação $\varphi(x) = 0$ será sempre resolúvel algebricamente. As equações que obedecem às condições (1) e (2) foram posteriormente denominadas de *equações Abelianas*[9, 10].

A condição (1) acima pode também ser re-escrita mais sucintamente como

$$x_{t+1} = \theta(x_t), \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

que implica termos

$$x_2 \equiv \theta(x_1), \qquad x_3 \equiv \theta(x_2) = \theta^2(x_1), \qquad x_4 \equiv \theta(x_3) = \theta^3(x_1), \qquad \text{etc.} \tag{4}$$

Mas, o que tem a ver a classe particular de equações descoberta por Abel com a física moderna?

Um velho problema da mecânica celeste que ainda é muito atual na física teórica, tanto a nível clássico quanto quântico, é o da classificação e estudo do comportamento das órbitas (trajetórias) dos *sistemas dinâmicos.* Um sistema dinâmico pode ser pensado como uma prescrição matemática que permite correlacionar o *estado* do sistema físico num determinado instante inicial, t_0, com o estado do sistema num instante de tempo t no futuro. Em outras palavras, um sistema dinâmico é um conjunto de regras, de fórmulas, que, em termos dos estados passados, permite determinar o estado atual bem como o estado futuro do sistema. Físicamente, podemos imaginar o tempo tanto como uma variável contínua como discreta. Se o tempo fluir continuamente, as regras que regem a evolução temporal dos estados do sistema serão definidas por um conjunto de equações diferenciais, estocásticas ou determinísticas. Se o tempo fluir de modo discreto, situação para a qual os resultados de Abel aplicam-se diretamente, a evolução é controlada por um mapa $f(x_t)$ que, a partir do estado x_t do sistema no instante t fornece o estado x_{t+1} do sistema no instante $t+1$:

$$x_{t+1} = f(x_t). \tag{5}$$

Esta é a *equação de movimento* que rege a evolução do sistema representado pela função $f(x)$.

Como exemplo paradigmático de mapa unidimensional, que sabidamente [11, 12, 13, 14] descreve a dinâmica de inúmeros processos físicos reais, podemos citar o *mapa quadrático*[15]

$$f(x) = a - x^2, \tag{6}$$

onde a denota um parâmetro de controle e x representa a grandeza física de interesse. Para $a = 2$ o mapa acima foi mostrado recentemente[16] como sendo o elemento chave de uma rede de mapas acoplados capazes de efetuar computações simples, emular as portas lógicas usadas na construção de computadores e codificar números, bem como realizar uma variedade de operações aritméticas relacionadas a estas aplicações.

Apesar da simplicidade da função quadrática (6), o comportamento dinâmico gerado com ela pela equação de movimento (5) é extremamente rico. Isto pode ser verificado "experimentalmente" atribuindo-se valores para a e estudando-se o comportamento assimptótico da seqüência de números gerados pela iteração definida através da Eq. (5). Tal comportamento assimptótico poderá ser: (i) um simples ponto fixo (órbita de período $k = 1$) que se repete, como é o caso quando para $a = 0$ iniciamos a iteração a partir do valor inicial $x_0 = 0$, (ii) uma órbita periódica de período k arbitrário, (iii) órbitas "caóticas", i.e. seqüências de números que não se repetem. A extrema complexidade e riqueza dos comportamentos observados tem sido descrita amplamente tanto na literatura mais direcionada a aplicações[11, 12, 13, 14], como em extensas monografias dedicadas a questões de cunho eminentemente matemático[17, 18, 19, 20, 21]. A mensagem básica destes estudos todos é a certeza de que equações muito simples, como a Eq. (5) acima, servem perfeitamente para descrever comportamentos observados na natureza bem como para realizar certas previsões. Mais ainda, uma miríade de trabalhos realizados nas últimas duas décadas demonstrou claramente que os comportamentos presentes em sistemas dinâmicos "simples" são, de fato, propriedades genéricas dos sistemas.

A esta altura, já é possível comparar-se a Eq. (5) com a Eq. (3) e aperceber-se que não existe diferença significativa entre elas. Enquanto Abel partia de raízes conhecidas e buscava uma função $\theta(x)$ que as relacionasse, os sistemas dinâmicos constituem-se numa espécie de 'problema inverso': tem-se *ab initio* uma equação de movimento $f(x)$ conhecida e investiga-se as propriedades do conjunto das órbitas (periódicas ou não) geradas quando condições iniciais e/ou parâmetros são variados. De qualquer modo, poucas dúvidas podem restar de que a classe de equações descobertas por Abel é fundamental para a análise e compreensão do conjunto infinito de órbitas gerado pelas equações de movimento dos sistemas dinâmicos.

Mas será que isto é tudo o que se pode afirmar? Onde entra a 'física moderna' nesta história? Para perceber como a física moderna entra em cena é preciso considerar-se a teoria das órbitas periódicas da mecânica clássica e quântica dos sistemas dinâmicos que são caóticos classicamente.

A teoria das órbitas periódicas tem como objetivo a *extração semiclássica* dos níveis de energia E de sistemas quânticos, relacionando suas propriedades espectrais às órbitas periódicas dos sistemas clássicos correspondentes.

No presente contexto, a palavra 'semiclássica' serve para indicar que, em vez de determinar-se os níveis de energia do modo usual (usando-se a mecânica quântica, i.e. resolvendo-se a equação de Schrödinger), o que se faz neste caso é tratar do problema usando apenas resultados da mecânica clássica, introduzindo-se porém de modo totalmente *ad hoc* na altura conveniente a imprescindível constante de Planck, h, a assinatura por excelência da teoria quântica.

Para sistemas *autônomos* (independentes do tempo), considera-se primordialmente o traço da função de Green $G(E)$, que também determina a importante *densidade de estados* $d(E)$. Para sistemas sob a ação de impulsos periódicos, a grandeza de maior interesse são os traços $\mathrm{tr}\ F^n$ do operador de evolução temporal na representação estroboscópica síncrona ou correlacionada com os impulsos. Tais traços contém em si as *quase-energias* dos estados que são estacionários na representação estroboscópica e podem ser escritos como somas sobre contribuições individuais das órbitas periódicas para sistemas caóticos hiperbólicos[22, 23, 24].

Ora, qualquer coisa que se descubra ser fundamental para o cálculo dos níveis de energia passa automaticamente a ser objeto de muita atenção em física. Por exemplo, existem estudos recentes onde se parte da mecânica clássica e, com fórmulas de traço, obtém-se o espectro de um átomo tão complexo como o átomo de hélio[25, 26, 27]. Assim sendo, fica fácil perceber porque o estudo do conjunto de órbitas periódicas dos sistemas dinâmicos passa a ter um lugar destacado: através de fórmulas de traço, ele pode ser ligado ao espectro de energia. Existe uma conhecida frase de Poincaré que resume bem a importância das órbitas periódicas[28]:

> *Étant données des équations de la forme définie dans le n^o 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable[29].*

Após hibernar durante quase um século, os pontos *homoclínicos* e *heteroclínicos*[30], que Poincaré então discutia, passam a ser amplamente reconhecidos no final do século XX como personagens centrais no estudo da dinâmica e da estabilidade de todos sistemas físicos. Percebe-se que por detrás de todo sistema dinâmico existe um *esqueleto* composto por infinitas órbitas periódicas sobre o qual, em particular, repousam as soluções caóticas estáveis. É este esqueleto de órbitas periódicas que precisa ser determinado para que se possa efetuar as somas que fornecem os traços que fornecem os níveis de energia. Porém as dificuldades computacionais nesta área são imensos. Por exemplo, até uma questão aparentemente tão simples quanto a mera determinação da *quantidade* de órbitas periódicas é na verdade um problema extremamente árduo de se resolver, mesmo para "caricaturas" dos problemas físicos reais[31] .

A acesso fácil a computadores pessoais, que passaram a funcionar como "telescópios" da era moderna, vem permitindo investigar questões que estiveram (e ainda estão!) fora do alcance de métodos puramente analíticos, por demandarem derivações longas e elaboradas demais para serem realisticamente efetuadas. No final dos anos 70 nasce o estudo da dinâmica "deterministicamente caótica", com a percepção generalizada de que os "fractais" de Mandelbrot permeiam, de fato, as ciências todas. Apesar de estudos analíticos detalhados do mapa quadrático terem sido já feitos então há vinte anos pelo matemático finlandês Myrberg[32], são as observações de Feigenbaum[33] sobre a "universalidade" de uma rota para o caos (via dobramento do período) que fazem ver a necessidade de se estudar os sistemas dinâmicos prototípicos com equações de movimento definidas (no caso mais simples, unidimensional) pela Eq. (5). Tal fato decisivo joga uma luz totalmente nova sobre as equações Abelianas: toda dinâmica no espaço de fase é necessariamente definida por equações Abelianas, como se percebe comparando-se as Eqs. (3) e (5) acima. Assim, o problema de estudar-se a estrutura do esqueleto contendo infinitas órbitas periódicas passa a ser isomórfico ao problema de determinar-se soluções às infinitas equações de Abel correspondentes a cada um dos períodos $k = 1, 2, 3, \ldots$. Passa a ser importante ter-se modelos elementares e realísticos nos quais se possam efetuar cálculos e testes numéricos. Duas "cobaias" prediletas para tanto são (i) o mapa quadrático ("logístico"[15]) já referido, nos estudos em uma dimensão, e (ii) sua versão bidimensional conhecida pelo nome de *mapa de Hénon*[34].

As aplicações das equações Abelianas são inúmeras mas mencionaremos aqui apenas duas. A primeira diz respeito à conscientização de que, apesar das infinitas órbitas que formam o esqueleto serem linearmente independentes, elas podem apresentar uma sutil dependência não-linear[35]. Para ver isto, considere $f(x) = a - x^2$ na Eq. (5), fixando $a = 2$, o mesmo parâmetro estudado por Sinha e Ditto[16]. Em outras palavras, considere o sistema dinâmico definido pela equação

$$x_{t+1} = 2 - x_t^2. \tag{7}$$

Para este sistema, considere o conjunto formado por todas as órbitas de período 6. Iterando-se a equação acima pode-se descobrir que o sistema em questão contém um total de 9 órbitas de período 6 que, sobre os inteiros, são formadas pelas raízes de quatro fatores polinomiais:

$$p_6(x) = \Phi_6^{(1)}(x)\ \Phi_6^{(2)}(x)\ \Phi_{18}(x)\ \Phi_{24}(x), \tag{8}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Phi_6^{(1)}(x) &= x^6 - x^5 - 5\,x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 - 3\,x - 1, && \text{(9a)}\\
\Phi_6^{(2)}(x) &= x^6 + x^5 - 6\,x^4 - 6\,x^3 + 8\,x^2 + 8\,x + 1, && \text{(9b)}\\
\Phi_{18}(x) &= x^{18} - 18\,x^{16} + x^{15} + 135\,x^{14} - 15\,x^{13}\\
&\quad -546\,x^{12} + 90\,x^{11} + 1287\,x^{10} - 276\,x^9\\
&\quad -1782\,x^8 + 459\,x^7 + 1385\,x^6 - 405\,x^5\\
&\quad -534\,x^4 + 170\,x^3 + 72\,x^2 - 24\,x + 1, && \text{(9c)}
\end{aligned}$$

e onde $\Phi_{24}(x)$ é um polinômio de grau 24, englobando uma família contendo 4 órbitas que é decomponível de três modos: em $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, em $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ e em $\mathbb{Q}(\sqrt{65})$. O polinômio $\Phi_{24}(x)$ é fácil de ser gerado mas sua forma explícita não nos interessa no momento.

Para uma grande classe de aplicações, o problema maior é determinar-se explicitamente as raízes de polinômios semelhantes aos acima, ou seja, determinar aproximações do conjunto de pontos que formam todas as órbitas periódicas. Apesar de trabalhoso, tal problema pode ser resolvido com o emprego de computadores, sendo as raízes computadas com um número de dígitos julgado suficiente para o tipo de aplicação. Porém, o que tais soluções numéricas não deixam transparecer de modo algum é a grande simetria que o sistema possui, imposta pelo processo iterativo que gera as equações de movimento.

A bela interdependência orbital *não-linear* acima mencionada pode ser apreciada observando-se que, dentro do conjunto das órbitas de período 6, temos a identidade seguinte:

$$\Phi_{18}(x) = \Phi_6^{(2)}(x^3 - 3x). \tag{10}$$

Portanto, o conhecimento da órbita $\Phi_6^{(2)}(x)$ e da *transformação* $T_3(x) = x^3 - 3x$ permite-nos gerar três órbitas adicionais, isoperiódicas. A transformação $T_3(x)$ é apenas uma das infinitas transformações $T_n(x)$ capazes de transformar órbitas tanto dentro do conjunto quanto para fora dos conjuntos de órbitas isoperiódicas[35]. Agora é preciso investigar as possíveis conseqüências das interdependências não-lineares nas somas sobre as órbitas periódicas e no espectro atômico.

A segunda aplicação das equações Abelianas que desejamos mencionar brevemente está relacionada com o conceito de função *periódica*. Se procurarmos na literatura pela definição de uma função periódica, iremos encontrar invariavelmente, com maior ou menor grau de sofisticação no enunciado, que uma função $P(t)$ é dita ser periódica se for possível encontrar uma constante τ para a qual vale $P(t+\tau) = P(t)$ em todo o domínio da P. Para as funções elípticas jacobianas é inclusive possível encontrar-se *duas* tais constantes, uma real e uma imaginária. Tal definição, entretanto, é uma simples paráfrase em símbolos da noção intuitiva bem conhecida de todos que "uma coisa qualquer é periódica quando repete-se de tanto em tanto".

Apesar de ser possível encontrar-se vasta literatura sobre funções periódicas e quase-periódicas, uma questão de fundamental importância para o entendimento de certos problemas relacionados com a estrutura das teorias físicas, e que parece-nos ainda permanecer sem resposta completa, é a seguinte[36]: qual a *origem* da periodicidade? Tomando-se, para fixar idéias, a classe das funções representáveis por séries de potências, que tipo de mecanismo matemático é necessário para gerar uma função periódica? Em outras palavras, que tipo de "motor" é necessário existir para que uma dada série de potências possa representar uma função periódica? Que tipo de vínculos devem existir entre os infinitos coeficientes de uma série de potências quando ela representar funções periódicas? Quanta liberdade de escolha temos para selecionar os coeficientes de cada potência à medida que o grau da variável aumenta?

Estudando-se os polinômios ciclotômicos bem como suas generalizações, que no caso unidimensional aparecem sob a forma da classe particular de funções discutidas por Abel, é possível chegar-se a resultados surpreendentes. Por exemplo, é possível obter-se fórmulas simples e explícitas relacionando os infinitos pontos que compõem no espaço de fase o esqueleto das órbitas periódicas de modo a poder-se com elas "gerar" funções periódicas. Exemplo: para ver como usar o esqueleto do mapa quadrático de modo a gerar *ab initio* as funções trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ e ver de que modo tais funções estão ligadas *não-linearmente* às funções hiperbólicas $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$, consulte a Ref. [36].

Mas a coisa não pára por ai. Muito pelo contrário. Um resultado surpreendente e provocante sob vários aspectos é o que relaciona a periodicidade "microscópica" das infinitas órbitas compondo o esqueleto com a periodicidade "macroscópica" que emerge para as funções trigonométricas ou hiperbólicas. Apesar das periodicidades microscópicas serem todas *discretas* e representadas invariavelmente por números *inteiros*, a periodicidade macroscópica resultante é dada por 2π ou $2\pi\sqrt{-1}$, números transcendentais. Como é possível acontecer tal paradoxo? Responder esta questão passa a ser vital quando se observa que hoje em dia os físicos sabem muito bem como extrair fenômenos *quantizados*, i.e. discretos, a partir de uma equação diferencial *contínua* (de Schrödinger). Tal equação parece sugerir serem os fenômenos contínuos, não discretos. Posto isto, será que a formulação atual da mecânica quântica, escrita sobre um espaço de Hilbert contínuo, não permitiria talvez uma representação conceitualmente mais elementar, partindo desde o início de quantidades discretas, possivelmente usando bases discretas sobre corpos finitos? Será possível usar equações Abelianas de modo a poder oferecer algum argumento testável em laboratório que possa contribuir para esclarecer de que modo flui o tempo[37], continua ou discretamente? Formuladas de dentro da física, tais questões revestem-se de um interesse teórico especial se lembrarmos que a estrutura matemática por detrás dos modernos modelos de supercordas e o programa de Langlands, para a unificação da matemática, já levou a argumentar-se que, afinal, a física teórica e a matemática possam na verdade ser uma mesma coisa[38].

Incidentalmente, eis aqui um problema "prático" gerado pela investigação dos pontos orbitais do mapa quadrático que cai no domínio "abstrato" da teoria dos números. Para determinar-se uma certa classe de movimentos de período 5 é preciso encontrar-se explicitamente as raízes duma equação de grau 11 através de uma fatoração num corpo apropriado. Tal fatoração apenas é possível graças à existência de uma decomposição múltipla do número 1318, que envolve combinações muito particulares de quatro números:

$$\begin{aligned} 1318 &= 6\cdot 41 + 16\cdot 26 + 16\cdot 41 = 246 + 416 + 656 \qquad (11a)\\ &= 6\cdot 16 + 6\cdot 26 + 26\cdot 41 \ = 96 + 156 + 1056. \qquad (11b)\end{aligned}$$

Por outro lado, a soma dos produtos destes quatro números por si próprios fornece-nos

$$6^2 + 16^2 + 26^2 + 41^2 = 2649. \qquad (12)$$

A diferença destes dois números é um cubo perfeito,

$$2649 - 1318 = 1331 = 11^3, \qquad (13)$$

o cubo do grau da equação em questão. Além disto,

$$2649 - 2\cdot 1318 = 1331 - 1318 = 13, \qquad (14)$$

que é precisamente o número primo seguinte a 11.

É difícil acreditar que tal decomposição múltipla possa ser apenas um mero acidente, pois a dinâmica Abeliana por detrás do processo de geração da equação implica, à medida que o período orbital cresce, na existência de uma família infinita de órbitas análogas que, parece razoável supor, dependam de resultados análogos para sua decomposição. Por outro lado, é possível gerar-se decomposições similares, porém consideravelmente mais elaboradas, envolvendo números algébricos, não simples inteiros como acima. Será possível provar-se algum resultado geral para decomposições múltiplas? Qual a relação, caso alguma exista, entre decomposições múltiplas e números primos? Por que a dinâmica privilegiou a particular soma dos quatro quadrados na Eq. (12) e não uma outra qualquer das várias maneiras possíveis de se representar 2649 como soma de quatro quadrados? O que será que decomposições múltiplas de números e somas de quatro quadrados tem a ver com dinâmica orbital no espaço de fase?

Como se pode ver, a consideração das equações Abelianas nos permite obter tanto resultados concretos, como os que relacionam as órbitas periódicas do esqueleto sobre o qual se assenta toda a dinâmica, quanto gerar questões difíceis e intrigantes em física e matemática. Um ponto sutil porém importante é a constatação de que ainda estamos, em todas as ciências, sob o forte impacto do acesso relativamente recente ao grande poder de cálculo dos computadores modernos. Um reflexo disto é a ênfase numérica e gráfica que ainda é muito forte. Mas uma nova oscilação do pêndulo histórico talvez não demore a chegar, com um retorno de métodos analíticos algébricos em detrimento da preponderante dominância dos métodos topológicos tão marcante do século passado. Afinal é preciso perceber: Poincaré, a quem juntamente com Einstein é comum atribuir-se o mérito de ter já sabido da riqueza que ainda está por ser explorada nas formulações clássicas e semi-clássicas, fez contribuições fundamentais utilizando tanto topologia quanto geometria algébrica. Se a topologia dominou o cenário numa primeira fase, deve ter sido apenas por falta de computadores que permitissem domar os cálculos por demais complicados para serem efetuados manualmente. Mas tal desequilíbrio deverá provavelmente alterar-se em breve. Quem sabe uma maneira de se contribuir para tanto não seria começando por ler e inspirar-se nos belos e ricos escritos de Abel?

Referências

[1] J. Lützen, resenha do livro *Called too Soon by Flames Afar: Niels Henrik Abel*, Notices of the American Mathematical Society, **49**, 795-799(2002), fascículo de agosto de 2002.

[2] *Called too Soon by Flames Afar: Niels Henrik Abel*, Arild Stubhaug, traduzido por Richard H. Daly, Springer-Verlag, 2000, Berlin.

[3] Veja detalhes em `http://www.math.uio.no/abel/`.

[4] N.H. Abel, *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, J. reine angewandte Mathematik, **4**, 131-156(1829); reimpressa (a partir dos originais de Abel) nos *Oeuvres Complètes*, deuxième édition, editadas por L. Sylow e S. Lie, 1881, Grøndahl and Søn, Christiania (Oslo).

[5] *Disquisitiones Arithmeticæ*, C.F. Gauss, Gerhard Fleischer, Leipzig, 1801 = volume I, dos *Gauss Werke*, Göttingen, 1870. Do original em Latim desta obra magistral existem pelo menos quatro traduções: francesa [*Recherches Arithmétiques*, por A.-C.-M. Poullet-Delisle, Chez Courcier, 1807, Paris = reimpresso em 1989, Éditions Jacques Gabay, Paris], alemã [*Untersuchungen über höhere Arithmetik*, por H. Maser, Springer-Verlag, 1889, Berlin = reimpresso em 1981 pela American Mathematical Society (Chelsea), Providence], inglesa [*Disquisitiones Arithmeticæ*, por Arthur A. Clarke, Springer-Verlag, 1966, New York], e espanhola [*Disquisitiones Arithmeticæ*, por Hugo Barrantes Campos, Michael Josephy e Angel Ruiz Zuñiga, Coleccion Enrique Perez Arbelaez, vol. 10, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Bogotá, 1995].

[6] Veja o artigo **365** do *Disquisitiones Arithmeticæ*[5].

[7] *Opere Matematiche di Paolo Ruffini*, Tomo Primo, editada por Ettore Bortolotti, Tipografia Matematica di Palermo, Palermo, 1915, págs. 1-322. Veja também: R.G. Ayoub, *On the nonsolvability of the general polynomial* Am. Math. Monthly, **89**, 397-401(1982).

[8] N.H. Abel, *Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden, als dem vierten, allgemein aufzulösen*, J. reine angewandte Mathematik, **1**, 65-84(1826). Oeuvres Complètes, Vol. I, pág. 66. Veja também o artigo de 1824, reimpresso na página 28.

[9] L. Kronecker, *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*, Monatsbericht der Königl. Preus. Akad. Wissensch. zu Berlin vom Jahre 1853 (I. Abhandlung), pág. 365-374; vom Jahre 1856 (II. Abhandlung), pág. 203-215. Uma tradução em francês do primeiro *Abhandlung* pode ser encontrada no *Cours d'Algèbre Supérieure* de J.-A. Serret, Tomo II, quarta edição, 1879, págs. 684-694. Ambos artigos encontram-se no volume 4 dos *Werke* de Kronecker, editados por K. Hensel, 1929.

[10] H. Weber, *Kleines Lehrbuch der Algebra*, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1921, §63, página 275. Primeiramente citado no *Lehrbuch der Algebra*, volume I, 1899, §169, pág. 575.

[11] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison Wesley, Reading, 1994.

[12] Nelson Fiedler-Ferrara e Carmen P. Cintra do Prado, *Caos, Uma Introdução*, Editora Edgar Blücher, São Paulo, 1994.

[13] I. Stewart, *Deus Joga aos Dados*? Gradiva, Lisboa, 2000.

[14] R.C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, segunda edição, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[15] O mapa quadrático é isomórfico ao mapa *logístico* $f(x) = \lambda x(1-x)$, forma normal usualmente utilizada em aplicações feitas por biólogos. O mapa quadrático envolve uma multiplicação a menos e, portanto, é mais apropriado para experimentos numéricos, onde quase sempre vários milhões de iterações são necessárias.

[16] S. Sinha e W.L. Ditto, *Dynamics based computation*, Phys. Rev. Lett., **81**, 2156-2129(1998).

[17] J. Palis e F. Takens, *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[18] W. de Melo e S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1993.

[19] L. Alseda, J. Llibre e M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, World Scientific, Singapore, 1993.

[20] *Real and Complex Dynamical Systems*, editado por B. Branner e P. Hjorth, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[21] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1999.

[22] M.C. Gutzwiller, *Energy spectrum according to classical mechanics*, J. Math. Phys., **11**, 1791-1806(1970); *Periodic orbits and classical quantization conditions*, J. Math. Phys., **12**, 343-358(1971); M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1990. *Quantum chaos*, Scientific American, **266**, 26-32 (1992), fascículo de janeiro de 1992.

[23] R. Blümel e W.P. Reinhardt, *Chaos in Atomic Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[24] Veja em `http://www.nbi.dk/ChaosBook/` o 'web-book' escrito e mantido pelo *CATS cyclist team*.

[25] D. Wintgen, A. Birgers, K. Richter, e G. Tanner, *Semiclassical approach to few-body problems – the helium atom*, Progress of Theoretical Physics Supplement, **116** 121-142, 1994; G.S.Ezra, K. Richter, G. Tanner and D. Wintgen, *Semiclassical cycle expansion for the helium atom*, J. Phys. B, **24**, L413-L420(1991).

[26] J.S. Briggs, *The dynamics of two-electron atoms*, Australian J. Phys., **52**, 341-349(1999).

[27] G. Tanner, K. Richter e J.M. Rost, *The theory of two-electron atoms: between ground state and complete fragmentation*, Reviews of Modern Physics, **72** 497-544(2000).

[28] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelle de la Mécanique Céleste*, Tomo I, Chapitre III (Solutions Périodiques), pág. 82, 1892. Reimpresso pela *Dover Publications Inc*, New York, 1957.

[29] Tradução: *Sendo dadas equações da forma definida no nº 13 e uma solução particular qualquer destas equações, pode-se sempre encontrar uma solução periódica (cujo período pode, é verdade, ser muito longo), tal que a diferença entre as duas soluções seja tão pequena quanto se queira, durante um tempo tão longo quanto se queira. Aliás, o que torna estas soluções periódicas tão preciosas é que elas são, por assim dizer, a única brecha por onde podemos tentar penetrar num local até aqui reputado como inabordável.*

[30] K.G. Andersson, *Poincaré's discovery of homoclinic points*, Archive for History of Exact Sciences, **48**, 133-147(1994).

[31] Veja, por exemplo, o artigo de V.Yu. Kaloshin, *Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits*, Comm. Math. Phys., **211**, 253-271(2000).

[32] P.J. Myrberg, *Iteration der reellen Polynome zweiten Grades*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A, **256**, 1-10(1958); **268**, 1-13(1959); **336**, 1-18(1963). Entre outras coisas, um resumo destes três artigos pode ser encontrado em P.J. Myrberg, *Sur l'itération des polynomes réels quadratiques*, J. Math. Pures et Appl., **41**, 339-351(1962). Veja também: K.M. Brucks, *MSS sequences, coloring of necklaces, and periodic points of* $f(z) = z^2 - 2$, Adv. Appl. Math., **8**, 434-445(1987).

[33] M.J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys., **19**, 25-52(1978). A história dos eventos subsequentes ao artigo de Feigenbaum aparece no livro *Caos, a Construção de uma Nova Ciência*, de James Gleick, Campus Editora, Rio de Janeiro, 1990, ou também: Gradiva, Lisboa, segunda edição, 1994.

[34] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys., **50**, 69-77(1976). Uma idéia dos problemas estudados para sistemas multidimensionais pode ser obtida consultando, por exemplo, os seguinte artigos, bem como as referências adicionais neles existentes: R. Dewaney and Z. Nitecki, *Shift automorphism in the Hénon mapping*, Commun. Math. Phys., **67**, 137-146(1979); J.H. Curry, *On the Hénon transformation*, Commun. Math. Phys., **68**, 129-140(1979); F.R. Marotto, *Chaotic behavior in the Hénon mapping*, Commun. Math. Phys., **68**, 187-194(1979); H. Daido, *Analytical conditions for the appearence of homoclinic and heteroclinic points of a 2D mapping – The case of the Hénon map*, Prog. Theor. Phys., **63**, 1190-1201(1980); M. Misiurewicz and B. Szewc, *Existence of a homoclinic point for the Hénon map*, Commun. Math. Phys., **75**, 285-291(1980); G. D'Alessandro, P. Grassberger, S. Isola, and A. Politi, *On the topology of the Hénon map*, J. Phys. A **23**, 5285-5294(1990); M. Benedicks and L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. Math., **133**, 73-169(1991); M. Barge and B. Diamond, *Subcontinua of the closure of the unstable manifold at a homoclinic tangency*, Erg. Th. and Dynam. Sys., **19**, 289-307(1999); M. Barge and B. Diamond, *Stable and unstable manifold structures in the Hénon family*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., **19**, 309-338(1999); S.L. Peng and X.S. Zhang, *The generalized Milnor-Thurston conjecture and equal topological entropy class in symbolic dy-*

namics of order topological space of three letters, Comm. Math. Phys., **213**, 381-411(2000).

[35] J.A.C. Gallas, *Infinite hierarchies of nonlinearly dependent periodic orbits*, Phys. Rev. E, **63**, artigo número 016216(2001); *Nonlinear dependencies between sets of periodic orbits*, Europhys. Lett., **47**, 649-655 (1999). As variedades algébricas típicas dos sistemas dissipativos são discutidas em detalhes no artigo *Structure of the parameter space of a ring cavity*, Appl. Phys. B, **60**, S203-S213(1995), suplemento especial, em comemoração aos 60 anos do Prof. Herbert Walther. Para desenvolvimentos adicionais veja: A. Endler e J.A.C. Gallas, *Arithmetical signatures of the dynamics of the Hénon map*, Phys. Rev. E, **65**, artigo número 036231 (2002). Estes e outros artigos encontram-se disponíveis no endereço `http://www.if.ufrgs.br/~jgallas`.

[36] J.A.C. Gallas, *On the origin of periodicity in dynamical systems*, Physica A, **283**, 17-23 (2000).

[37] *Physical Origins of Time Asymmetry*, editado por J.J. Hallwell, J. Pérez-Mercader e W.H. Zurek, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[38] G. Chapline, *Is theoretical physics the same thing as mathematics*? Physics Reports, **315**, 95-105(1999).